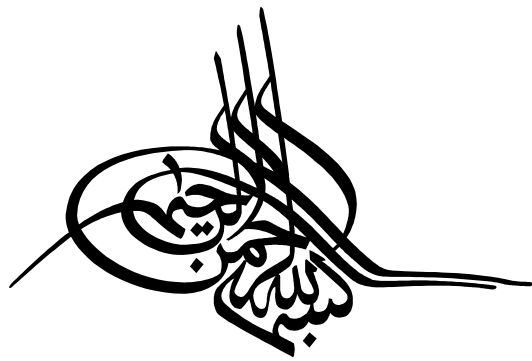




ریاضی عمومی (۳)

سری کتابهای کمک آموزشی کارشناسی ارشد

مجموعه مدیریت

مؤلف: حسن رضاپور

علیرضا حاجی صفری

سهیل صولتی

سرشناسه	رضا پور، حسن :
عنوان	حسن رضا پور :
مشخصات نشر	تهران: مشاوران صعود ماهان، ۱۴۰۱
مشخصات قاهره	۱۴۸ ص :
فروست	سری کتابهای کمک آموزشی کارشناسی ارشد :
شابک	۷-۹۲۷-۴۵۸-۶۰۰-۹۷۸ :
وضعیت فهرست نویسی	فهرست مختصر :
شناسه افزوده	علیرضا حاجی صفری - سهیل صولتی :
یادداشت	: این مدرک در آدرس http://opac.nlai.ir قابل دسترسی است.
شماره کتابشناسی ملی	۸۶۷۵۱۹۲ :



کتاب: ریاضی عمومی (۳)
مدیر مسئول: هادی سیاری، مجید سیاری
مولف: حسن رضا پور - علیرضا حاجی صفری - سهیل صولتی
ناشر: مشاوران صعود ماهان
مدیر تولید محتوا: سمیه بیگی
نوبت و تاریخ چاپ: اول / ۱۴۰۱
تیراژ: ۱۰۰۰ جلد
قیمت: ۲/۲۹۰/۰۰۰ ریال
شابک: ISBN: ۹۷۸-۶۰۰-۴۵۸-۹۲۷-۷

انتشارات مشاوران صعود ماهان: خیابان ولیعصر، بالاتر از تقاطع مطهری،
روبروی قنادی هتل بزرگ تهران، جنب بانک ملی، پلاک ۲۰۵۰
تلفن: ۴-۸۸۱۰۰۱۱۳

سخن ناشر

«ن والقلم و ما یسطرون»

کلمه نزد خدا بود و خدا آن را با قلم بر ما نازل کرد.

به پاس تشکر از چنین موهبت الهی، مؤسسه ماهان درصدد برآمده است تا در راستای انتقال دانش و مفاهیم با کمک اساتید مجرب و مجموعه کتب آموزشی خود برای شما داوطلبان ادامه تحصیل در مقطع کارشناسی ارشد، گام مؤثری بردارد. امید است تلاش‌های خدمتگزاران شما در این مؤسسه پایه‌گذار گام‌های بلند فردای شما باشد. مجموعه کتاب‌های کمک آموزشی ماهان به‌منظور استفاده داوطلبان کنکور کارشناسی ارشد سراسری و آزاد تألیف شده‌اند. در این کتاب‌ها سعی کرده‌ایم با بهره‌گیری از تجربه اساتید بزرگ و کتب معتبر داوطلبان را از مطالعه کتاب‌های متعدد در هر درس بی‌نیاز کنیم.

دیگر تألیفات ماهان برای سایر دانشجویان به‌صورت ذیل است.

● مجموعه کتاب‌های ۸ آزمون: شامل ۵ مرحله کنکور کارشناسی ارشد ۵ سال اخیر به همراه ۳ مرحله آزمون تألیفی ماهان همراه با پاسخ تشریحی می‌باشد که برای آشنایی با نمونه سوالات کنکور طراحی شده است. این مجموعه کتاب‌ها با توجه به تحلیل ۳ ساله اخیر کنکور و بودجه‌بندی مباحث در هریک از دروس، اطلاعات مناسبی جهت برنامه‌ریزی درسی در اختیار دانشجو قرار می‌دهد.

● مجموعه کتاب‌های کوچک: شامل کلیه نکات کاربردی در گرایش‌های مختلف کنکور کارشناسی ارشد می‌باشد که برای دانشجویان جهت جمع‌بندی مباحث در ۲ ماهه آخر قبل از کنکور مفید است.

بدین‌وسیله از مجموعه اساتید، مولفان و همکاران محترم خانواده بزرگ ماهان که در تولید و به‌روزرسانی تألیفات ماهان نقش مؤثری داشته‌اند، صمیمانه تقدیر و تشکر می‌نماییم.

دانشجویان عزیز و اساتید محترم می‌توانند هرگونه انتقاد و پیشنهاد درخصوص تألیفات ماهان را از طریق سایت ماهان به mahan.ac.ir با ما در میان بگذارند.

مؤسسه آموزش عالی آزاد ماهان

سخن مؤلف

مقدمه مؤلف

کتاب پیش رو با مجموعه‌ای بسیار مناسب برای جمع‌بندی و زدن تست‌های استاندارد کنکورهای کارشناسی ارشد در رشته‌های فنی مهندسی و علوم پایه برای درس ریاضی عمومی است برای این منظور، بعد از مطالعه کتاب ریاضی عمومی (۱ و ۲) می‌توانید این کتاب جهت تسلط، جمع‌بندی و ارزیابی خود استفاده کنید.

لطفاً هر گونه انتقاد، پیشنهاد یا مطلبی در خصوص این کتاب را به ایمیل Hassan.Rezapour@gmail.com ارسال فرمایید.

موفق باشید

مؤلفین: رضاپور،

حاجی صفری، صولتی

فهرست

سوالات و پاسخ تشریحی سال ۹۶.....	۶
سوالات و پاسخ تشریحی سال ۹۷.....	۴۱
سوالات و پاسخ تشریحی سال ۹۸.....	۶۹
سوالات و پاسخ تشریحی سال ۹۹.....	۸۹
سوالات و پاسخ تشریحی سال ۱۴۰۰.....	۱۲۰



۱- فرض کنید z_1, z_2, z_3 اعداد مختلط و متمایز باشند که رئوس یک مثلث متساوی‌الساقین و قائم‌الزاویه در رأس z_1 است. کدام یک از روابط زیر صحیح است؟

$$\begin{array}{ll} z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0 & (۲) \\ z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 = 0 & (۱) \\ (z_1 - z_2)^2 + (z_2 - z_3)^2 = 0 & (۳) \\ (z_1 - z_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 = 0 & (۴) \end{array}$$

۲- طول قوس منحنی $\cosh x$ برای $0 \leq x \leq 2$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} \sinh(2) - 1 & (۱) & \cosh(2) & (۲) \\ \sinh(2) - 1 & (۳) & \cosh(2) - 1 & (۴) \end{array}$$

۳- بازه همگرایی سری $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2x-3)^n \ln n}{(3n+1)5^n}$ برابر است با:

$$\begin{array}{llll} [-1, 4] & (۱) & (-1, 4] & (۲) \\ [0, 3] & (۳) & [0, 3] & (۴) \end{array}$$

۴- سری‌های $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ و $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ به ترتیب و می‌باشند.

$$\begin{array}{llll} (۱) \text{ واگرا- واگرا} & (۲) \text{ همگرا- همگرا} & (۳) \text{ واگرا- همگرا} & (۴) \text{ همگرا- واگرا} \end{array}$$

۵- مقدار $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\Delta \sin x + \cos x}{2 \sin x + 3 \cos x} dx$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} \frac{\pi}{2} - \ln\left(\frac{3}{2}\right) & (۱) & \frac{\pi}{2} + \ln\left(\frac{3}{2}\right) & (۲) \\ \ln\left(\frac{3}{2}\right) & (۳) & \frac{\pi}{2} & (۴) \end{array}$$

۶- معادله صفحه قائم بر خم C با معادله برداری $\vec{r}(t) = 4 \cosh t \hat{i} + 8 \sinh t \hat{j} + e^t \hat{k}$ در نقطه نظیر $t = \ln 2$ کدام گزینه است؟

$$\begin{array}{llll} x \ln 2 + y + z = 1 & (۱) & 8x + 4y + z = 65 & (۲) \\ 4x + 8y + z = 12 & (۳) & 3x + 10y + 2z = 79 & (۴) \end{array}$$

۷- مشتق سویی تابع $f(x, y, z) = x^2 + 3xy + xyz^2$ در نقطه $P(1, 1, -1)$ و در جهت بردار یک‌ه از نقطه‌ی P به نقطه‌ی $Q(2, 2, -3)$ کدام است؟

$$\begin{array}{llll} \frac{12}{\sqrt{3}} & (۱) & \frac{12}{6} & (۲) \\ \frac{14}{\sqrt{3}} & (۳) & \frac{14}{\sqrt{6}} & (۴) \end{array}$$

۸- فرض کنید C منحنی حاصل از برخورد دو رویه‌ی $\phi = \theta$ و $\rho = 1 + \cos \theta$ در مختصات کروی باشد. اگر دستگاه TNB

برای منحنی C را در $\theta = \frac{\pi}{4}$ تشکیل دهیم T کدام است؟

$$\begin{array}{llll} \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) & (۱) & \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) & (۲) \\ \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) & (۳) & \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) & (۴) \end{array}$$

۹- فرض کنید S رویه‌ی $z \leq 2$ و $-1 \leq x^2 + y^2 = 4$ باشد.

اگر $\vec{F}(x, y, z) = (zy^2 + \cos(y^2) + x^3)\hat{i} + (x^2 + yz)\hat{j}(\sin(xy) + 3y^2z)\hat{k}$ ، در این صورت شار برونسوی گذرنده از رویه‌ی S کدام است؟

$$\begin{array}{llll} 98\pi & (۱) & 96\pi & (۲) \\ 94\pi & (۳) & 90\pi & (۴) \end{array}$$

۱۰- فرض کنید R ناحیه‌ای در R^3 باشد که با نامساوی‌های $r \leq 1$ و $0 \leq z \leq 5 - r^2$ مشخص می‌شود. مقدار

$$\iiint_R (x^2 + y^2) dx dy dz$$

$$\begin{array}{llll} 2\pi & (۱) & \frac{7\pi}{3} & (۲) \\ \frac{13\pi}{6} & (۳) & 0 & (۴) \end{array}$$

۱۱- ناحیه‌ی محصور بین منحنی‌های $y = x^2$ و $y = -x + 2$ و محور x را حول محور y ها دوران می‌دهیم. حجم شکل حاصل کدام است؟

(۱) 2π (۲) $\frac{5\pi}{3}$ (۳) $\frac{11\pi}{6}$ (۴) $\frac{13\pi}{6}$

۱۲- مقدار حد زیر کدام است؟

(۱) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^4+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^4+n^4}} \right)$ (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) $+\infty$

۱۳- کدام گزینه به ترتیب در مورد $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2}$ و $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{xy-x-y+1}{x^2+y^2-2x-2y+2}$ صحیح است؟

(۱) حد اولی موجود است ولی دومی حد ندارد. (۲) اولی حد ندارد ولی دومی دارای حد است.

(۳) هر دو مورد دارای حد نیستند. (۴) هر دو مورد حد دارند.

۱۴- ماکزیمم تابع $f(x,y,z) = (\ln x + \ln y + 3 \ln z)^\Delta$ بر بخشی از کره $x^2 + y^2 + z^2 = 125$ که در آن $x > 0, y > 0, z > 0$ به صورت $(\ln A)^\Delta$ می‌باشد، مقدار A کدام گزینه است؟

(۱) $\sqrt{3}(25)^\Delta$ (۲) $\sqrt{3}(5)^\Delta$ (۳) $3\sqrt{3}(25)^\Delta$ (۴) $3\sqrt{3}(5)^\Delta$

۱۵- اگر C اشتراک نیم کره $x^2 + y^2 + z^2 = 6x$ و $z > 0$ و $x^2 + y^2 = 4x$ باشد، مقدار $\int_C (y^2 + z^2)dx + (z^2 + x^2)dy + (x^2 + y^2)dz$ برابر کدام گزینه است؟ (جهت C به گونه‌ای است که جهت حرکت تصویر آن روی صفحه‌ی xy در جهت مثلثاتی است.)

(۱) 12π (۲) 18π (۳) 24π (۴) 36π

۱۶- حاصل $\frac{dy}{dx}$ در عبارت $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+\sin t^3}} + \int_y^2 \sin t^2 dt = 0$ کدام است؟

(۱) $y' = \frac{-1}{\sin(2y)\sqrt{1+\sin^3 x}}$ (۲) $y' = \frac{1}{\sin(2y)\sqrt{1+\sin^3 x}}$
(۳) $y' = \frac{-1}{\sin y^2\sqrt{1+\sin x^3}}$ (۴) $y' = \frac{1}{\sin y^2\sqrt{1+\sin x^3}}$

۱۷- مقدار انتگرال $\int_1^e \frac{1}{\sqrt{-\pi \ln x}} dx$ کدام است؟

(۱) $\sqrt{\pi}$ (۲) e

(۳) ۱ (۴) این انتگرال تعریف نشده است.

۱۸- دامنه‌ی همگرایی سری $\sum_{n=k}^{\infty} \frac{(n-k)!}{n!k!} (x-a)^{n+k}$ کدام است؟ (k یک عدد اول است.)

(۱) $|x-a| < k$ (۲) $|x-a| < 1$ (۳) $|x-a| < \frac{1}{k}$ (۴) مجموعه اعداد حقیقی.

۱۹- می‌دانیم که $\frac{e^{-am}}{a^2} = \int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2+a^2} dx$. مقدار انتگرال $\int_0^{\infty} \frac{x \sin^3 x}{x^2+16} dx$ کدام است؟

(۱) $\frac{\pi}{4} e^{-12}$ (۲) $\frac{\pi}{8} e^{-12}$ (۳) $4\pi e^{-12}$ (۴) $8\pi e^{-12}$

۲۰- حاصل عبارت $s = \frac{1 + (i^{۱۳۹۱} + i^{۱۳۹۲} + i^{۱۳۹۳} + i^{۱۳۹۴} + i^{۱۳۹۵})}{1 - (i^{۲۰۱۳} + i^{۲۰۱۴} + i^{۲۰۱۵} + i^{۲۰۱۶} + i^{۲۰۱۷})}$ کدام است؟

- (۱) i (۲) $-i$ (۳) -1 (۴) $-i$

۲۱- انحناى منحنى $\begin{cases} x = t + \sin t \\ y = t - \sin t \\ z = \sqrt{2} \cos t \end{cases}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ (۲) $2\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{2}$ (۴) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

۲۲- اگر $u = \frac{x^2 y^2 - y^4}{x^2 + y^2}$ مقدار $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y}$ کدام است؟

- (۱) $4u$ (۲) $3u$ (۳) $2u$ (۴) u

۲۳- اگر $I = \int_1^2 f(u) du$ و $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 < xy < 2, 1 < x^2 - y^2 < \Delta\}$ باشد، آنگاه $\iint_D f(xy)(x^2 + y^2) dx dy$ کدام است؟

- (۱) $\frac{I}{4}$ (۲) $2I$ (۳) I (۴) $\frac{I}{2}$

۲۴- حاصل انتگرال $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$ وقتی $\vec{F}(x, y, z) = y \sin z \vec{i} + 3xy \vec{j} + \tan x \vec{k}$ کدام است؟ S مرز ناحیه‌ی: $x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 2, x^2 + y^2 \leq 4$ می‌باشد.

- (۱) -48 (۲) -24 (۳) 24 (۴) 48

۲۵- مقدار انتگرال $\int_1^e \frac{1}{x} \sqrt{(\ln x)^2 + (\ln x)^3} dx$ کدام است؟

- (۱) $\frac{4\sqrt{2} + 4}{15}$ (۲) $\frac{4 + \sqrt{2}}{15}$ (۳) $\frac{4\sqrt{2} + 1}{15}$ (۴) $\frac{1 + \sqrt{2}}{15}$

۲۶- به ازای کدام عدد حقیقی C انتگرال ناسره $\int_0^\infty \left[\frac{C}{x+1} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right]$ همگراست و مقدار انتگرال چقدر است؟

- (۱) $C = \frac{1}{2}$ و مقدار $-\ln 2$ (۲) $C = 1$ و مقدار $-\ln 2$

- (۳) $C = \frac{1}{2}$ و مقدار $\frac{1}{2}$ (۴) $C = 1$ و مقدار $\frac{1}{2}$

۲۷- نقطه تماس صفحه افقی مماس بر رویه $z = x^4 - 4xy^3 + 6y^2 - 2$ کدام است؟

- (۱) $(-1, 0, -1)$ (۲) $(0, 1, 4)$ (۳) $(1, 1, 1)$ (۴) $(1, -1, 9)$

۲۸- اگر $u(x, y, t) = \frac{1}{t} e^{-\frac{x^2 + y^2}{4t}}$ ، آنگاه مقدار $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{x^2 + y^2}{4t^3} e^{-\frac{x^2 + y^2}{4t}}$ (۲) $\frac{2}{t^2} e^{-\frac{x^2 + y^2}{4t}}$ (۳) $-\frac{2}{t^2} e^{-\frac{x^2 + y^2}{4t}}$ (۴) 0

۲۹- اگر مسیر C با رئوس $(3, 0)$ و $(6, 0)$ و $(17, 5)$ در جهت حرکت عقربه‌های ساعت باشد آنگاه

$\int_C (7y + e^{x^2}) dx + (19 + e^{y^2}) dy$ برابر است با:

- (۱) 180 (۲) 90 (۳) 45 (۴) $\frac{45}{2}$

۳۰-هرگاه $\vec{r}(t) = e^t \vec{i} + e^t \vec{j} + t \vec{k}$ ، $0 \leq t \leq 1$ ، $\vec{F}(x, y, z) = ye^x \vec{i} + xe^y \vec{j} + \cosh xy \vec{k}$ باشد، انتگرال $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ چقدر است؟

(۴) $e^{e^2} - e$

(۳) $e^{e^2} - 1$

(۲) $e^e - e$

(۱) $e^e - 1$

پاسخنامه سوالات کنکور سراسری MBA سال ۹۶

۱- گزینه «۳»

در مثلث متساوی الساقین داریم:

$$|z_2 - z_1| = |z_3 - z_1|$$

از طرفی قائم الزاویه هم هست، پس داریم:

$$(z_2 - z_1)e^{i\frac{\pi}{2}}(z_3 - z_1) \xrightarrow{\text{به توان } 2}$$

طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(z_2 - z_1)^2 = e^{i\pi}(z_3 - z_1)^2 \Rightarrow (z_2 - z_1)^2 = -(z_3 - z_1)^2 \Rightarrow (z_2 - z_1)^2 + (z_3 - z_1)^2 = 0$$

$$\rightarrow (z_1 - z_2)^2 + (z_1 - z_3)^2 = 0$$

ضمناً اگر نقاط $z_1 = 1$ و $z_2 = 0$ و $z_3 = 1+i$ که در شرایط مساله صادق است را در نظر بگیریم گزینه‌های ۱، ۲ و ۴ رو می‌شوند.

۲- گزینه «۱»

از فرمول طول قوس برای تابع $f(x)$ استفاده می‌کنیم:

$$f(x) = \cosh x \Rightarrow \text{طول قوس} = \int_0^2 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \Rightarrow L = \int_0^2 \sqrt{1 + \sinh^2 x} dx = \int_0^2 \cosh x dx \Rightarrow L = \sinh x \Big|_0^2 = \sinh 2$$

۳- گزینه «۲»

$$\text{سری داده شده} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n \ln n}{(3n+1)\delta^n} \left(x - \frac{2}{3}\right)^n$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt[n]{\frac{2^n \ln n}{(3n+1)\delta^n}} \Rightarrow \frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\delta} \sqrt[n]{\frac{\ln n}{3n+1}} = \frac{2}{\delta} \Rightarrow R = \frac{\delta}{2}$$

مرکز بازه‌ی همگرایی $x_0 = \frac{2}{3}$ است. پس بازه‌ی همگرایی به صورت زیر است:

$$(x_0 - R, x_0 + R) = \left(\frac{2}{3} - \frac{\delta}{2}, \frac{2}{3} + \frac{\delta}{2}\right) = (-1, 4)$$

در $x = 4$ داریم:

$$x = 4 \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n \ln n}{(3n+1)\delta^n} \left(4 - \frac{2}{3}\right)^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{3n+1}$$

دنباله‌ی $\frac{\ln n}{3n+1}$ نزولی و همگرا به صفر است. بنابراین سری در $x = 4$ همگرا است.

البته اگر از همان ابتدا همگرایی سری در $x = 4$ بررسی می‌شد گزینه‌های ۱ و ۳، ۴ رد می‌شدند و دیگر نیازی به محاسبه R نبود.

۴- گزینه «۳»

برای سری $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ با استفاده از آزمون ریشه داریم:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-\frac{n}{n+1}} = e^{-1} < 1 \rightarrow \text{همگراست}$$

برای $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ که یک سری متناوب است و دنباله‌ی $\frac{1}{\sqrt{n}}$ نزولی و همگرا به صفر است، پس این سری در شرایط همگرایی سری‌های متناوب صدق می‌کند. پس این سری هم همگرا است.

۵-گزینه «۲»

قرار دهید $u = 2 \sin x + 3 \cos x$ باشد. پس $U' = 2 \cos x - 3 \sin x$ ؛ و داریم:

$$\Rightarrow \Delta \sin x + \cos x = A(2 \sin x + 3 \cos x) + B(2 \cos x - 3 \sin x)$$

$$\Rightarrow \Delta \sin x + \cos x = (2A - 3B) \sin x + (3A + 2B) \cos x$$

و در نتیجه:

$$\begin{cases} 2A - 3B = \Delta \\ 3A + 2B = 1 \end{cases} \Rightarrow A = 1, B = -1$$

از حل این دستگاه به جواب‌های $A = 1$ و $B = -1$ می‌رسیم. در نتیجه داریم:

$$\Delta \sin x + \cos x = u - u'$$

بنابراین داریم:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\Delta \sin x + \cos x}{2 \sin x + 3 \cos x} dx = \int \frac{u - u'}{u} dx = \int \left(1 - \frac{u'}{u}\right) dx = x - \ln|u| = x - \ln|2 \sin x + 3 \cos x| \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{\pi}{2} + \ln \frac{3}{2}$$

۶-گزینه «۴»

$$t = \ln r \rightarrow \begin{cases} x_* = r \cosh(\ln r) = \frac{r}{2} (e^{\ln r} + e^{-\ln r}) = r \left(2 + \frac{1}{2}\right) = \Delta \\ y_* = r \sinh(\ln r) = \frac{r}{2} (e^{\ln r} - e^{-\ln r}) = r \left(2 - \frac{1}{2}\right) = \epsilon \\ z_* = e^{\ln r} = r \end{cases} \Rightarrow \text{نقطه} = (\Delta, \epsilon, 2)$$

دقت کنید نقطه $(\Delta, \epsilon, 2)$ در گزینه‌های ۱، ۲، ۳ صدق نمی‌کنند پس آنها غلط و ۴ جواب است. برای حل تشریحی تر مساله داریم:

$$\vec{v}(t) = \vec{r}(t) = (r \sinh t, r \cosh t, e^t) \xrightarrow{t=\ln r}$$

$$\vec{r}'(\ln r) = (r \sinh(\ln r), r \cosh(\ln r), e^{\ln r}) = \left(\frac{r}{2} \left(2 - \frac{1}{2}\right), \frac{r}{2} \left(2 + \frac{1}{2}\right), r\right) = (3, 1, 2)$$

$$3(x - \Delta) + 1(y - \epsilon) + 2(z - 2) = 0 \Rightarrow 3x + 1y + 2z = 79$$

۷-گزینه «۴»

$$P(1, 1, -1), Q(2, 2, -3) \rightarrow$$

$$\vec{u} = \vec{PO} = (2 - 1, 2 - 1, -3 + 1) = (1, 1, -2)$$

$\vec{u}$ را یکم کنید:

$$\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{(1, 1, -2)}{\sqrt{6}}$$

بردار گرایان $\vec{f}$ برابر است با:

$$\vec{\nabla} f = (f_x, f_y, f_z) = (2x + 3y + yz^2, 3x + xz^2, 2xyz) \Big|_{(1, 1, -1)} = (6, 4, -2)$$

$$D_{\vec{u}} f(p) = \nabla f \cdot \vec{u} = \frac{\vec{\nabla} f \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{6 + 4 + 4}{\sqrt{6}} = \frac{14}{\sqrt{6}}$$

۸- گزینه «۳»

از مختصات کروی داریم:

$$\begin{cases} x = \rho \sin \phi \cos \theta \\ y = \rho \sin \phi \sin \theta \\ z = \rho \cos \phi \end{cases}$$

با قراردادن $\phi = \theta$ و $\rho = 1 + \cos \theta$ داریم:

$$\vec{V} \begin{cases} x = (1 + \cos \theta) \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} (1 + \cos \theta) \sin 2\theta \\ y = (1 + \cos \theta) \sin \theta \sin \theta = \frac{1}{2} (1 + \cos \theta) \sin 2\theta \\ z = (1 + \cos \theta) \cos \theta \end{cases}$$

پس:

$$\vec{V}' \begin{cases} x'(\theta) = \frac{1}{2} [-\sin \theta \sin 2\theta + 2 \cos 2\theta (1 + \cos \theta)] \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -1 \\ y'(\theta) = \frac{1}{2} [-\sin \theta \sin 2\theta + 2 \cos 2\theta (1 + \cos \theta)] \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -1 \\ z'(\theta) = -\sin \theta \cos \theta - \sin \theta (1 + \cos \theta) \Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -1 \end{cases} \Rightarrow (-1, -1, -1)$$

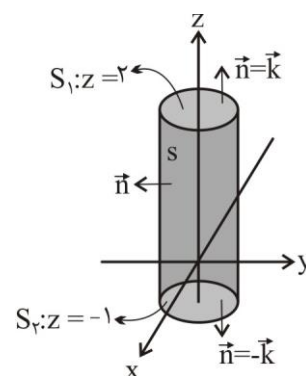
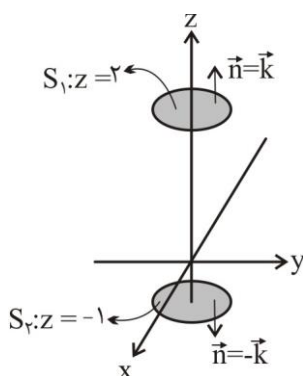
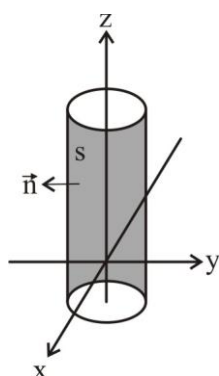
پس:

$$\vec{T} = \frac{\vec{V}'}{|\vec{V}'|} = \frac{(-1, -1, -1)}{\sqrt{3}} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

۹- گزینه «؟؟؟»

هیچ کدام از گزینه‌ها صحیح نیست.

سطح S بسته نیست. با اضافه کردن صفحات $S_1: z=2, S_2: z=-1$ آن را به سطحی بسته تبدیل می‌کنیم.



روی سطح $S \cup S_1 \cup S_2$ چون سطح بسته است، از قضیه دیورژانس استفاده می‌کنیم:

$$I_1 = \iint_{S \cup S_1 \cup S_2} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \iiint_V (\text{div} \vec{F}) \, dv = \iiint_V (r x^2 + z + r y^2) \, dv$$

با استفاده از مختصات استوانه‌ای داریم:

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{z}} \int_{-1}^{\sqrt{z}} (3r^2 + z) r dz dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{z}} \left(3r^3 + r \frac{z^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right) \Big|_{-1}^{\sqrt{z}} dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{z}} \left(3r^3 + \frac{2}{3} r z^{\frac{3}{2}} \right) dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{4} r^4 + \frac{2}{4} r^2 z^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^{\sqrt{z}} d\theta = (2\pi)(36 + 3) = 78\pi$$

حالا روی سطح $S_1: z = -1$ داریم $\vec{n} = -\vec{k}$ پس داریم:

$$I_2 = \iint_{S_1} \vec{F} \cdot (-\vec{k}) d\sigma = - \iint_{S_1} (\sin xy - 3y^2) d\sigma$$

و روی سطح $S_2: z = 2$ داریم $\vec{n} = \vec{k}$ پس داریم:

$$I_3 = \iint_{S_2} \vec{F} \cdot \vec{k} d\sigma = \iint_{S_2} (\sin xy + 6y^2) d\sigma$$

تصویر سطوح S_1, S_2 بر صفحه‌ی xy همان ناحیه دورن دایره‌ی $x^2 + y^2 = 4$ است که آن را D می‌نامیم.

$$I_2 + I_3 = \iint_D (-\sin xy + 3y^2 + \sin xy + 6y^2) dy dx = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{4-\sin^2 \theta}} 9r^2 \sin^2 \theta dr d\theta$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \right) \left(\int_0^{\sqrt{4-\sin^2 \theta}} 9r^2 dr \right) = \pi(36) = 36\pi$$

جواب صحیح برای این مسأله، به این صورت است:

$$I = I_1 - I_2 - I_3 = 78\pi - 36\pi = 42\pi$$

۱۰-گزینه «۳»

با استفاده از روش مختصات استوانه‌ای داریم:

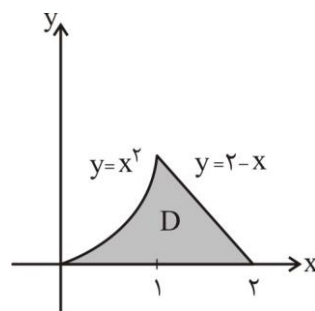
$$I = \iiint_R (x^2 + y^2) dx dy dz = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{5}} \int_0^{\sqrt{5}-r^2} r^2 r dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{5}} r^3 (\sqrt{5}-r^2) dr d\theta = 2\pi \left[\sqrt{5} \times \frac{r^4}{4} - \frac{r^6}{6} \right]_0^{\sqrt{5}}$$

$$= 2\pi \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{6} \right) = \frac{13\pi}{6}$$

۱۱-گزینه «۳»

ناحیه داده شده به صورت زیر است:

$$V = 2x \left(\int_0^1 x(x^2) dx + \int_1^2 x(2-x) dx \right) = \frac{11}{6}$$



همچنین می‌توان با فرمول دوران حول محور x ها مساله را به صورت زیر حل کرد:

$$V = \pi \int_0^1 (f^2(y) - g^2(y)) dy = \pi \int_0^1 ((2-y)^2 - \sqrt{y}^2) dy =$$

$$= \pi \left[4y - \frac{5}{3} y^{\frac{3}{2}} + \frac{y^3}{3} \right]_0^1 \Rightarrow V = \frac{11}{6} \pi$$

۱۲-گزینه «۲»

$$\text{چون } \frac{n^{\Delta}}{\sqrt{n^{\Delta}+n^{\Delta}}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^{\Delta}+n^{\Delta}}} \leq \frac{n^{\Delta}}{\sqrt{n^{\Delta}+1}}, \dots, \frac{n^{\Delta}}{\sqrt{n^{\Delta}+n^{\Delta}}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^{\Delta}+1}} \leq \frac{n^{\Delta}}{\sqrt{n^{\Delta}+1}}$$

$$\frac{n^{\Delta}}{\sqrt{n^{\Delta}+n^{\Delta}}} \leq \frac{1}{\sqrt{n^{\Delta}+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\frac{1}{n} \times \frac{n^{\Delta}}{\sqrt{n^{\Delta}+n^{\Delta}}} \leq \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{n^{\Delta}+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^{\Delta}+n^{\Delta}}} \right) \leq \frac{1}{n} \times \frac{n^{\Delta}}{\sqrt{n^{\Delta}+1}}$$

چون حد در طرفین نامعادله وقتی $n \rightarrow +\infty$ برابر یک است با استفاده از قضیه فشردگی داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{\sqrt{n^{\Delta}+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^{\Delta}+n^{\Delta}}} \right) = 1$$

۱۳-گزینه «۱»

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2+z^2)}{x^2+y^2+z^2} \approx \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2} = 1$$

در مورد حد دوم،

$$x=1 \text{ مسیر } \rightarrow \text{مقدار حد} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{y-1-y+1}{1+y^2-2-2y+2} = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{0}{y^2-2y+1} = 0$$

اما روی مسیر $y=x$ داریم:

$$y=x \text{ مسیر } \rightarrow \text{مقدار حد} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-x-x+1}{x^2+x^2-2x-2x+2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x+1}{2(x^2-2x+1)} = \frac{1}{2}$$

دقت کنید برای حد دوم می‌توان نوشت:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \left(\frac{xy-xy-1}{x^2+y^2-2x-2y+2} \right) = \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{(x-1)(y-1)}{(x-1)^2+(y-1)^2} = \lim_{(u,v) \rightarrow (0,0)} \frac{uv}{u^2+v^2}$$

چون $(u,v) \rightarrow (0,0)$ و درجه صورت (۲) با مخرج برابر است پس حد ندارد.

۱۴-گزینه «۴»

تابع f را می‌توان به صورت مقابل نوشت:

$$f(x,y,z) = \ln(xyz^2))^{\Delta}$$

گفته شده ماکزیمم تابع روی کره $x^2+y^2+z^2=125$ در ربع اول به صورت $(\ln A)^{\Delta}$ است؛ برای یافتن مقدار A می‌توانیم بیشترین مقدار عبارت $w=xyz^2$ را روی کره $x^2+y^2+z^2=125$ به دست بیاوریم. (البته با شرط $z>0, y>0, x>0$).

از تناسب لاگرانژ استفاده می‌کنیم:

$$\frac{yz^2}{2x} = \frac{xz^2}{2y} = \frac{3xyz^2}{2z}$$

با انجام طرفین وسطین داریم:

$$\begin{cases} 2y^2z^2 = 2x^2z^2 \Rightarrow y^2 = x^2 \Rightarrow y = x \\ 2yz^2 = 6x^2yz^2 \Rightarrow z^2 = 3x^2 \Rightarrow z = \sqrt{3}x \end{cases}$$

(دقت کنید که می‌دانیم Z, Y, X همگی مثبت هستند)

با جایگذاری $y=z$ و $z=\sqrt{3}x$ در معادله‌ی کره داریم:

$$x^2+y^2+z^2=125 \Rightarrow x^2+x^2+3x^2=125 \Rightarrow x^2=25 \Rightarrow x=5, y=5, z=5\sqrt{3}$$

با جایگذاری در W داریم:

$$w = xyz^2 = 5 \times 5 \times 5^2 \times 3\sqrt{3}(5)^5 \Rightarrow A = 3\sqrt{3}(5)^5$$

۱۵-گزینه «۳»

سطح S بخشی از نیم کره‌ی $x^2 + y^2 + z^2 = 6x$ ($z \geq 0$) بگیرید که C مرز آن است. و مساله را با استوکس حل کنید.

میدان برداری $\vec{F} = (y^2 + z^2, x^2 + z^2, x^2 + y^2)$ می باشد پس:

$$\text{curl} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 + z^2 & x^2 + z^2 & x^2 + y^2 \end{vmatrix} = 2(y-z)\vec{i} - 2(x-z)\vec{j} + 2(x-y)\vec{k}$$

قرار دهید $g: x^2 + y^2 + z^2 - 6x = 0$ پس

$$\vec{\nabla} g = (2x-6, 2y, 2z), k = (0, 0, 1) \Rightarrow nds = \frac{\nabla g}{|\nabla g \cdot k|} dA = \frac{(2k-6, 2y, 2z)}{2z} dA$$

بنابراین اگر D تصویر S بر صفحه‌ی xoy باشد که توسط استوانه‌ی $x^2 + y^2 = 6x$ مشخص می شود، داریم:

$$I = \iint_S \text{curl} \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iint_D \frac{2(y-z)(x-3) - 2y(x-z) + 2z(x-y)}{2z} dy dx =$$

$$= \iint_D \frac{yx - 2y - zx + 3z - yx + yz + zx - zy}{z} dy dx$$

$$I = 2 \iint_D \frac{z(z-y)}{z} dy dx = 6 \iint_D (1 - \frac{y}{z}) dy dx$$

از معادله‌ی S داریم $z = \sqrt{6x - x^2 - y^2}$ پس می توان نوشت:

$$I = 6 \iint_D (1 - \frac{y}{\sqrt{6x - x^2 - y^2}}) dy dx$$

که D تصویر ناحیه بر صفحه xy یعنی $x^2 + y^2 = 6x$ می باشد که نسبت به Y زوج و نسبت به y فرد

است پس $\int_D \int \frac{y dA}{\sqrt{6x - x^2 - y^2}}$ صفر است و داریم:

$$I = 6 \int \int_D 1 dA = 6x(D \text{ مساحت}) = 6(4\pi) = 24\pi$$

دقت کنید به مرکز (۲، ۱) و به شعاع ۲ دارای مساحت 4π می باشد.

۱۶-گزینه «۴»

با استفاده از مشتق ضمنی و قضیه اساسی حساب دیفرانسیل داریم:

$$F: \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+\sin t}} + \int_y^2 \sin t^2 dt = 0 \xrightarrow{x}$$

$$y' \xrightarrow{\text{ضمنی}} -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{\frac{1}{\sqrt{1+\sin x^2}}}{-\sin y^2} = \frac{1}{\sin y^2 \sqrt{1+\sin x^2}}$$

۱۷-گزینه «۳»

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-\ln x}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 (-\ln x)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{\pi} \Gamma\left(-\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \times \sqrt{\pi} = 1$$

۱۸- گزینه «۲»

شعاع همگرایی سری به صورت زیر بدست می آید:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1}{R} \Rightarrow \frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1-k)!}{(n+1)!k!} \times \frac{n!k!}{(n-k)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1-k)(n-k)!}{(n+1)n!k!} \times \frac{n!k!}{(n-k)!} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1-k}{n+1} \right) = 1$$

پس $\frac{1}{R} = 1$ و لذا $R = 1$ می باشد پس $|x-a| < 1$ بازه همگرایی می باشد زیرا a مرکز سری داده شده است.

۱۹- گزینه «۲»

از طرفین نسبت به پارامتر m مشتق می گیریم و خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{x^2 + a^2} dx = \frac{e^{-am}}{a^2}$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{-mx \sin x}{x^2 + a^2} dx = \frac{-ae^{-am}}{a^2} = \frac{-e^{-am}}{a}$$

حالا با جایگذاری $a=4$ و $m=3$ داریم:

$$-\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x \sin 3x}{x^2 + 16} dx = -\frac{e^{-12}}{4} \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{x \sin 3x}{x^2 + 16} dx = \frac{\pi}{8} e^{-12}$$

۲۰- گزینه «۱»

$$S = \frac{1 + (i^{1391} + i^{1392} + i^{1393} + i^{1394} + i^{1395})}{1 - (i^{2013} + i^{2014} + i^{2015} + i^{2016} + i^{2017})} = \frac{1 + (i^3 + 1 + i + i^2 + i^3)}{1 - (i + i^2 + i^3 + 1 + i)}$$

$$= \frac{1 + (-i + 1 + i - 1 - i)}{1 - (i - 1 + i + 1 + i)} = \frac{1 - i}{1 - i} = 1$$

۲۱- گزینه «۱»

$$\vec{R}(t) = (t + \sin t, t - \sin t, \sqrt{2} \cos t)$$

بردارهای $\vec{R}'(t)$ و $\vec{R}''(t)$ را حساب می کنیم:

$$\vec{V} = \vec{R}'(t) = (1 + \cos t, 1 - \cos t, -\sqrt{2} \sin t)$$

$$\vec{a} = \vec{R}''(t) = (-\sin t, \sin t, -\sqrt{2} \cos t)$$

برای ساده تر شدن محاسبات، انحنای را در $t=0$ حساب می کنیم:

$$\vec{V} = \vec{R}'(0, 0, 0), \vec{a} = \vec{R}''(0, 0, -\sqrt{2})$$

ضرب خارجی این دو بردار را نیاز داریم:

$$\vec{V} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{vmatrix} = \sqrt{2} \vec{j} \Rightarrow k = \frac{|\vec{V} \times \vec{a}|}{|\vec{V}|^3} = \frac{\sqrt{2}}{(2)^3} = \frac{\sqrt{2}}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

۲۲- گزینه «۳»

u همگن از درجه ۲ می باشد پس بنا به قضیه اول اوایلر $2u$ پاسخ سوال می باشد.

۲۳- گزینه «۲»

قرار دهید $v = x^2 - y^2, u = xy$ پس $1 \leq V \leq 5, 1 \leq u \leq 2$ و داریم:

$$J = \frac{1}{J} = \frac{1}{\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} y & x \\ 2x & -2y \end{vmatrix}} = \frac{1}{-2(y^2 + x^2)} \Rightarrow |J| = \frac{1}{2(x^2 + y^2)} \Rightarrow$$

$$\iint_D f(x, y)(x^2 + y^2) dy dx = \int_1^5 \int_1^5 f(u) \frac{(x^2 + y^2)}{2(x^2 + y^2)} dv du = \frac{1}{2} \int_1^5 \int_1^5 f(u) dv du = \frac{1}{2} \int_1^5 f(u) (v|_1^5) du = \int_1^5 f(u) du = 2I$$

۲۴-گزینه «۳»

S یک سطح بسته است پس از قضیه دیورژانس استفاده می کنیم.

$$I = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma = \iiint_V (\operatorname{div} \vec{F}) dv = \iiint_V (0 + 3x + 0) dz dy dx \xrightarrow{\text{استوانه‌ای}}$$

بهتر است از مختصات استوانه‌ای استفاده کنیم. در ربع اول از دایره‌ی $x^2 + y^2 = 4$ داریم $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ و $0 \leq r \leq 2$ و $0 \leq z \leq 3$ پس:

$$I = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \int_0^3 (r \cos \theta) r dz dr d\theta = 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 3r^2 \cos \theta dr d\theta = 3 (\sin \theta|_0^{\frac{\pi}{2}}) \times (r^3|_0^2) = 24$$

۲۵-گزینه «۱»

از تغییر متغیر $t = \ln x$ استفاده می کنیم. در این صورت $x = e^t$ و داریم $dx = e^t dt$

$$1 \leq x \leq e \Rightarrow 0 \leq t \leq 1$$

$$I = \int_0^1 \frac{1}{e^t} \sqrt{t^2 + t^2} e^t dt = \int_0^1 \sqrt{t^2 + t^2} dt = \int_0^1 \sqrt{t^2(1+t)} dt = \int_0^1 t \sqrt{1+t} dt$$

با تغییر متغیر $u = \sqrt{1+t}$ داریم: $t = u^2 - 1$ و $dt = 2u du$ در ضمن $0 \leq t \leq 1$ ، پس $1 \leq u \leq \sqrt{2}$ است.

$$I = \int_1^{\sqrt{2}} (u^2 - 1)u(2u du) = 2 \int_1^{\sqrt{2}} (u^4 - u^2) du = 2 \left[\frac{u^5}{5} - \frac{u^3}{3} \right]_1^{\sqrt{2}} = 2 \left[\frac{4\sqrt{2}-1}{5} - \frac{2\sqrt{2}-1}{3} \right] = \frac{4\sqrt{2}+4}{15}$$

۲۶-گزینه «۲»

$$I = \int_0^\infty \frac{c\sqrt{x^2+1} - x - 1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$$

وقتی $x \rightarrow \infty$ با هم ارزی داریم:

$$\frac{c\sqrt{x^2+1} - x - 1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} \approx \frac{(c-1)x}{x^2} = \frac{c-1}{x}$$

درجه مخرج برابر با یک است، پس انتگرال ناسره در $x \rightarrow \infty$ واگرا می شود، و برای اینکه این اتفاق نیفتد باید $c-1=0$ باشد، یعنی به ازای $c=1$ انتگرال همگرا است.

$$I = \int_0^\infty \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \right) dx = \left[\ln(x+1) - \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \right]_0^\infty = \left[\ln \left(\frac{x+1}{x + \sqrt{x^2+1}} \right) \right]_0^\infty = -\ln 2$$

۲۷-گزینه «۳»

بردار نرمال صفحه‌ی مماس بر رویه، همان بردار گرادیان یعنی $\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$ می باشد.

اگر بخواهیم صفحه مماس بر رویه یک صفحه افقی به صورت $z = \bar{k}$ باشد، باید بردار نرمال این صفحه به صورت $\vec{n} = (0, 0, f_z)$ باشد، یعنی باید داشته باشیم:

$$\begin{cases} 4x^3 - 4y^3 = 0 \\ -12xy^2 + 12y = 0 \end{cases} \rightarrow (x=1, y=1) \rightarrow z=1 \quad \vec{n} = (0, 0, \frac{\partial f}{\partial z})$$

۲۸-گزینه «۴»

$$u(x, y, t) = \frac{1}{t} e^{\frac{x^2+y^2}{t}} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{2x}{4t} \times \frac{1}{t} e^{\frac{x^2+y^2}{4t}}$$

مجدداً نسبت به X داریم:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{1}{4t^2} e^{\frac{x^2+y^2}{4t}} + \left(\frac{2x}{4t}\right) \frac{1}{t} e^{\frac{x^2+y^2}{4t}} \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{t^2} e^{\frac{x^2+y^2}{4t}} \left(-\frac{1}{2} + \frac{x^2}{4t}\right)$$

به علت تقارن X و Y در ضابطه‌ی این تابع، مشتق دوم نسبت به Y هم مانند مشتق دوم نسبت به X است، فقط جای X و Y عوض می‌شود:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{t^2} e^{\frac{x^2+y^2}{4t}} \left(-\frac{1}{2} + \frac{y^2}{4t}\right)$$

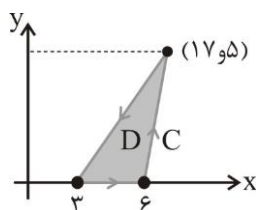
برای $\frac{\partial u}{\partial t}$ داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{t^2} e^{\frac{x^2+y^2}{4t}} + \frac{1}{t} \times \left(\frac{x^2+y^2}{4t^2}\right) e^{\frac{x^2+y^2}{4t}} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{t^2} e^{\frac{x^2+y^2}{4t}} \left(-1 + \frac{x^2+y^2}{4t}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{t^2} e^{\frac{x^2+y^2}{4t}} \left(-1 + \frac{x^2+y^2}{4t} + \frac{1}{2} - \frac{y^2}{4t} + \frac{1}{2} - \frac{x^2}{4t}\right) = 0$$

۲۹-گزینه «۲»

قضیه گوین $\Rightarrow$ کار در صفحه + مسیر بسته



$$\int F d\vec{n} = \iint \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} dA = \iint_D 12 dy dx \Rightarrow I = 12 \times (\text{مساحت } D) = 12 \times \frac{15}{2} = 90$$

ناحیه‌ی D مثلثی با قاعده‌ی ۳ و ارتفاع ۵ است، پس مساحت آن برابر با $\frac{3 \times 5}{2} = \frac{15}{2}$ است.

$$F = (ye^{x^r}, xe^{y^r}, \cosh xy^r)$$

$$\alpha(t) = (e^t, e^t, r), \quad 0 \leq t \leq 1 \Rightarrow \alpha'(t) = (e^t, e^t, 0)$$

چون میدان ناپایستار و میر باز است با تعریف داریم:

$$\begin{aligned} \text{کار} &= \int F \cdot dr \xrightarrow{\text{تعریف}} \int F(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) dt \\ &= \int_0^1 (e^t \cdot e^{e^{rt}}, e^t \cdot e^{e^{rt}}, \cosh(e^{rt})) \cdot (e^t, e^t, 0) dt \\ &= \int_0^1 re^{rt} \cdot e^{e^{rt}} dt \xrightarrow[\substack{u=e^{rt} \\ du=re^{rt} \cdot e^{e^{rt}} dt}]{u=e^{rt}} \int du = u \\ &= e^{e^{rt}} \Big|_0^1 = e^{e^r} - e \end{aligned}$$



سوالات چهار گزینه‌ای کنکور سراسری مواد سال ۹۶

۱- معادله خط قائم بر منحنی $y = x^{2x}$ در نقطه $(1, 1)$ ، کدام است؟

- (۱) $x + 2y - 3 = 0$ (۲) $2x + y - 3 = 0$ (۳) $x + y - 2 = 0$ (۴) $x = y$

۲- اگر $z(r, \theta) = \cos(r \sin \theta) e^{r \cos \theta}$ باشد، آنگاه حاصل $\frac{dz}{dr}$ در نقطه $(1, 0)$ ، کدام است؟

- (۱) e^{-1} (۲) e^2 (۳) صفر (۴) e

۳- مقدار انتگرال $\int_{-1}^1 e^{-x^2} d(x|x|)$ ، کدام است؟

- (۱) $1 + e^{-1}$ (۲) $1 - e^{-1}$ (۳) $2(1 - e^{-1})$ (۴) $2(1 + e^{-1})$

۴- سری مکلورن تابع $f(x) = \frac{1}{(4-3x)^2}$ ، کدام است؟

- (۱) $\frac{1}{12} \sum_{m=0}^{\infty} m \left(\frac{3}{4}\right)^m x^m, |x| < \frac{4}{3}$ (۲) $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{3^m}{4^{m+2}} (m+1) x^m, |x| < \frac{4}{3}$
(۳) $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{3^m}{4^{m+2}} (m+1) x^m, |x| < \frac{4}{3}$ (۴) $\frac{1}{12} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{3^{m-1}}{4^{m+1}} (m+1) x^{m-1}, |x| < \frac{4}{3}$

۵- کمترین فاصله مبدأ مختصات از سطح S به معادله $x^2 - z^2 = 2$ ، کدام است؟

- (۱) $\sqrt{3}$ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) ۱ (۴) ۲

۶- فرض کنید $f(x, y) = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9}$ مقدار مشتق سویی (جهتی) f در نقطه $(4, 3)$ و در جهت بردار $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{6}$ (۲) $\frac{6\sqrt{2}}{7}$ (۳) $\frac{6}{7}$ (۴) $\frac{7}{6\sqrt{2}}$

۷- بردار یکه مماسی گذرا بر منحنی حاصل از فصل مشترک رویه‌های $\frac{x}{y} + z^2 x + yz = 1$ و $x^2 y - 3x^2 z + y = 2$ در نقطه

$(1, 1, 0)$ کدام است؟

- (۱) $\pm \frac{\vec{i} + 5\vec{j} + 4\vec{k}}{7}$ (۲) $\pm \frac{\vec{i} + 5\vec{j} - 4\vec{k}}{\sqrt{42}}$ (۳) $\pm \frac{\vec{i} + 5\vec{j} + 4\vec{k}}{\sqrt{42}}$ (۴) $\pm \frac{\vec{i} - 5\vec{j} + 4\vec{k}}{\sqrt{42}}$

۸- مقدار انتگرال $\int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin y}{y} dy dx$ ، کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۱ (۳) -۱ (۴) ۲

۹- مساحت ناحیه محدود بین محور y ها، خط $x = \frac{\pi}{4}$ می‌باشد، بالای نمودار $y = \sin x$ و زیر نمودار $y = \cos x$ کدام است؟

- (۱) $\frac{\sqrt{2}}{2} - 1$ (۲) $\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$ (۳) $\sqrt{2} + 1$ (۴) $\sqrt{2} - 1$

۱۰- اگر منحنی C توسط $x = t, y = \sin t, z = \cos t$ در فاصله $[0, \pi]$ پارامتری شده باشد و $\vec{F}(x, y, z) = (z, xy, xz)$ ، آنگاه

مقدار $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) $\frac{5}{4}$ (۳) $\frac{3}{4}$ (۴) $\frac{1}{4}$

پاسخنامه تشریحی سوالات کنکور سراسری مواد سال ۹۶

۱- گزینه «۱»

$$y = x^{rx} \Rightarrow \ln y = rx \ln x \Rightarrow \frac{y'}{y} = r \ln x + r \Rightarrow y' = x^{rx} (r \ln x + r)$$

پس $y'(1) = r$: شیب خط مماس و در نتیجه شیب خط قائم $-\frac{1}{r}$ می باشد و

$$y - 1 = -\frac{1}{r}(x - 1) \Rightarrow ry + x - 3 = 0$$

۲- گزینه «۴»

$$z = \cos(r \sin \theta) e^{r \cos \theta} \Rightarrow z'_r = -\sin \theta \sin(r \sin \theta) e^{r \cos \theta} + \cos \theta \cdot \cos(r \sin \theta) e^{r \cos \theta} \Big|_{(r=1, \theta=0)} = e$$

۳- گزینه «۳»

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 e^{-x^2} d(x|x|) &= \int_{-1}^0 e^{-x^2} d(-x^2) + \int_0^1 e^{-x^2} d(x^2) = \int_{-1}^0 (-2x) e^{-x^2} dx + \int_0^1 2x e^{-x^2} dx \\ &= e^{-x^2} \Big|_{-1}^0 - e^{-x^2} \Big|_0^1 = 1 - e^{-1} - e^{-1} + 1 = 2 - 2e^{-1} = 2(1 - e^{-1}) \end{aligned}$$

۴- گزینه «۲»

چون $f(0) = \frac{1}{16}$ پس جمله اول یا همان عدد ثابت بسط تابع f باید $\frac{1}{16}$ شود که اگر در گزینه های ۱ و ۳، $m = 0$ و گزینه ۴،

$m = 1$ را محاسبه کنیم حاصل $\frac{1}{16}$ نمی شوند و غلط هستند. اما برای حل کامل داریم:

$$\frac{1}{4-3x} = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{3}{4}x} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}x\right)^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{3^m}{4^{m+1}} x^m (I)$$

که در این سری قدرنسبت $q = \frac{3}{4}x$ می باشد که باید $|q| < 1$ پس $\left|\frac{3}{4}x\right| < 1$ پس $|x| < \frac{4}{3}$ با مشتق گیری از طرفین رابطه (I) داریم:

$$\frac{3}{(4-3x)^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{3^m}{4^{m+1}} \cdot mx^{m-1} \Rightarrow \frac{1}{(4-3x)^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{3^{m-1}}{4^{m+1}} mx^{m-1} \xrightarrow{m \rightarrow m+1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{3^m}{4^{m+2}} (m+1)x^m$$

۵- گزینه «۲»

با تعریف $z = r \sin \theta$, $x = r \cos \theta$ داریم:

$$x^2 - z^2 = r^2 \Rightarrow r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta = r^2 \Rightarrow r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = r^2 \Rightarrow r^2 \cos 2\theta = r^2 \Rightarrow r = \sqrt{\frac{r^2}{\cos 2\theta}}$$

برای می نیمم کردن r باید مخرج کسر یعنی $\cos 2\theta$ ماکزیمم شود که بیشترین مقدار آن $\cos 2\theta = 1$ است. پس کمترین مقدار $r = \sqrt{2}$ است.

۶- گزینه «۴»

$$\nabla f = \left(\frac{x}{8}, \frac{2y}{9}\right) \Big|_{(4,3)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right), \quad \text{یکه } u = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\Rightarrow D_u f(4,3) = \nabla f \cdot u = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{2}{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{7}{6}}{\sqrt{2}} = \frac{7}{6\sqrt{2}}$$

۷- گزینه «۳»

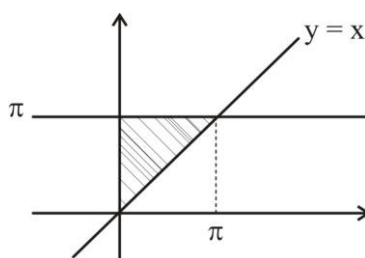
$$g: \frac{x}{y} + z^2x + yz - 1 = 0 \Rightarrow \nabla g = \left(\frac{1}{y} + z^2, -\frac{x}{y^2} + z, 2zx + y \right) \Big|_{(1,1,0)} = (1, -1, 1)$$

$$f: x^2y - 3x^2 + y - 2 = 0 \Rightarrow \nabla f = (2xy - 6xz, x^2 + 1, -3x^2) \Big|_{(1,1,0)} = (2, 2, -3)$$

پس بردار مماس $\nabla g \times \nabla f = (1, 5, 4)$ می باشد که یکه $\frac{1}{\sqrt{42}}(1, 5, 4)$ و یا قرینه‌ای از آن است.

۸- گزینه «۱»

باید ترتیب المان‌های انتگرال را عوض کرد. ناحیه انتگرال گیری $0 \leq x \leq \pi, x \leq y \leq \pi$ می باشد پس:



$$\int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin y}{y} dy dx = \int_0^\pi \int_0^y \frac{\sin y}{y} dx dy = \int_0^\pi \sin y dy$$

$$= -\cos y \Big|_0^\pi = -(-1 - 1) = 2$$

۹- گزینه «۴»

$$\text{مساحت: } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x - \sin x dx = \sin x + \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 1 = \sqrt{2} - 1$$

۱۰- گزینه «۱»

$$\alpha(t) = (t, \sin t, \cos t) \rightarrow \alpha'(t) = (1, \cos t, -\sin t)$$

$$\int F \cdot d\mathbf{r} \stackrel{\text{تعریف}}{=} \int_0^\pi F(\alpha(t)) \alpha'(t) dt = \int_0^\pi (\cos t, t \sin t, t \cos t) \cdot (1, \cos t, -\sin t) dt$$

$$= \int_0^\pi \cos t dt = \sin t \Big|_0^\pi = 0$$



سوالات چهارگزینه‌ای کنکور سراسری صنایع سال ۹۶

۱- حاصل عبارت $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right)^{10}$ کدام است؟ $(i = \sqrt{-1})$

- (۱) $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ (۲) $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ (۳) $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ (۴) $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

۲- فرض کنید تابع g در R پیوسته بوده و $\int_0^1 g(t)dt = 2$ می‌باشد. اگر $f(x) = \frac{1}{3} \int_0^x (x-t)^2 g(t)dt$ باشد، حاصل $f''(1)$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) -۲ (۴) -۴

۳- در کدام بازه، تقعر منحنی $y = \int_0^x \frac{dt}{1+t+t^2}$ ، رو به بالا است؟

- (۱) $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ (۲) $(\frac{1}{2}, +\infty)$ (۳) $(-\infty, \frac{1}{2})$ (۴) $(-\infty, -\frac{1}{2})$

۴- مقدار انتگرال $\int_{-6}^6 \frac{\sqrt{[x]+9}}{\sqrt{[x]+9} + \sqrt{[-x]+9}} dx$ کدام است؟ $[x]$ جزء صحیح x است

- (۱) صفر (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۹

۵- فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی مثبت باشد. کدام گزینه همواره صحیح است؟ $(n = 1, 2, \dots)$

(۱) اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ همگرا باشد، آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ نیز همگراست.

(۲) اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ همگرا باشد، آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ نیز همگراست.

(۳) دو سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ همرفتارند.

(۴) دو سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ همرفتارند.

۶- فرض کنید $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ سه بردار در فضا باشند به طوری که $\vec{a} - \vec{c}, \vec{a} - \vec{b}$ با هم موازیند و $\vec{a} \times \vec{b} = (-2, 0, 1)$ و $\vec{a} \times \vec{c} = (0, -1, 3)$ می‌باشد. در این صورت $\vec{b} \times \vec{c}$ کدام است؟

- (۱) $(-2, 1, -2)$ (۲) $(2, -1, 2)$ (۳) $(2, 1, -4)$ (۴) $(-2, -1, 4)$

۷- حاصل $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{xy} [\cos(xy) - x \sin y]$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{e}$ (۴) e

۸- اگر $f(x, y, z) = x^{\sqrt{2}} \times y^{\sqrt{3}} + \sqrt{2}z$ ، آنگاه بردار $\vec{\nabla} f(1, 1, 1)$ با محور x ها چه زاویه‌ای می‌سازد؟

- (۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) $\frac{\pi}{3}$ (۳) $\frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{\pi}{6}$

۹- مقدار انتگرال $\iint_D \frac{xe^x + ye^y}{e^x + e^y} dx dy$ کدام است؟ D ناحیه $x^2 + y^2 \leq 2$ و $y \geq 0, x \geq 0$ می‌باشد.

- (۱) 5π (۲) $\frac{5\pi}{2}$ (۳) $\frac{5\pi}{4}$ (۴) $\frac{5\pi}{8}$

۱۰- مقدار انتگرال $\int_C (x+y)ds$ کدام است؟ C منحنی $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ از نقطه $(0,0)$ تا نقطه $(2\pi,0)$ می باشد.

- (۱) $4\pi + \frac{16}{3}$ (۲) $4\pi + \frac{32}{3}$ (۳) $8\pi + \frac{16}{3}$ (۴) $8\pi + \frac{32}{3}$

۱۱- مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 \sin \frac{1}{n} + \frac{1}{3} \cos n)^n$ کدام است؟

- (۱) $+\infty$ (۲) $\frac{1}{e}$ (۳) e (۴) 0

۱۲- فرض کنید تابع f دوبار مشتق پذیر بوده و در رابطه زیر صدق کند. در این صورت مقدار $f(\pi)$ کدام است؟

$$\int_0^\pi [f(x) + f''(x)] \sin x dx = 4; f(0) = 1$$

- (۱) -3 (۲) 3 (۳) -5 (۴) 5

۱۳- حاصل انتگرال $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sqrt{1 - 2 \sin 2x + 3 \csc^2 x} dx$ کدام است؟

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) $2\sqrt{5} - 3$ (۴) $2\sqrt{5} + 3$

۱۴- طول قوس منحنی $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}\ln x$ در بازه $[1,2]$ کدام است؟

- (۱) $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln 2$ (۲) $\frac{3}{2} + \frac{1}{4}\ln 2$ (۳) $\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$ (۴) $\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\ln 2$

۱۵- کدام مورد برای سری $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 \left(\frac{x}{x+2}\right)^n$ صحیح است؟

- (۱) به ازای $x > -1$ همگرای مطلق (۲) به ازای $x < -1$ همگرای مشروط
(۳) به ازای هر x همگرای مطلق (۴) به ازای هر x همگرای مشروط

۱۶- انتگرال های $B = \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx$, $A = \int_1^{\infty} \frac{1 - 4 \sin^2 x}{x^3 + \sqrt{x}} dx$ مفروضند. کدام مورد صحیح است؟

- (۱) A و B هر دو همگرای مشروط (۲) A و B هر دو همگرای مطلق
(۳) A همگرای مطلق و B همگرای مشروط (۴) A همگرای مشروط و B همگرای مطلق

۱۷- با فرض $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \alpha$ مقدار $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)^2}$ کدام است؟

- (۱) $-\frac{\alpha}{8}$ (۲) $-\frac{\alpha}{16}$ (۳) $-\frac{3\alpha}{8}$ (۴) $-\frac{3\alpha}{16}$

۱۸- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^4}$ کدام است؟

- (۱) ∞ (۲) 1 (۳) 0 (۴) وجود ندارد

۱۹- مشتق تابع $f(x,y) = 2ey^x + \ln y$ در نقطه $A(0,1)$ و در امتداد بردار گرادیان کدام است؟

- (۱) $\sqrt{13}$ (۲) $\frac{1}{\sqrt{13}}$ (۳) $2\sqrt{13}$ (۴) $\frac{\sqrt{13}}{2}$

۲۰- فرض کنید $h(x, y) = -f\left(\frac{y}{x}\right) + xg\left(\frac{y}{x}\right)$ که در آن f و g توابع مشتق پذیر تا مرتبه دوم هستند. در این صورت مقدار

$$x^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}$$

برابر کدام است؟

(۴) $-xy \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}$

(۳) $2xy \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}$

(۲) $-xy \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}$

(۱) $xy \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}$

پاسخنامه تشریحی سوالات کنکور سراسری صنایع سال ۹۶

۱- گزینه «۴»

$\sqrt{3} + i$ را به فرمت قطبی بنویسید؛

$$x = \sqrt{3}, y = 1 \Rightarrow r = 2, \theta = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \sqrt{3} + i = 2e^{i(\frac{\pi}{6})}$$

اما $\sqrt{3} - i$ مزدوج $\sqrt{3} + i$ می باشد پس $\sqrt{3} - i = 2e^{i(-\frac{\pi}{6})}$ و داریم:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\sqrt{3} + i}{\sqrt{3} - i} \right)^{1/2} &= \left(\frac{2e^{i(\frac{\pi}{6})}}{2e^{i(-\frac{\pi}{6})}} \right)^{1/2} = \left(e^{i(\frac{\pi}{3})} \right)^{1/2} = e^{i(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3})} = e^{i(\frac{\pi}{6})} = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \end{aligned}$$

۲- گزینه «۱»

از قضیه اساس حساب دیفرانسیل داریم:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\int_0^x t g(t) dt \right) \Rightarrow f''(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\int_0^x t g(t) dt \right)' \Rightarrow f''(1) = \int_0^1 g(t) dt = 2$$

۳- گزینه «۴»

برای اینکه تعقر رو به بالا باشد باید $y'' > 0$ پس:

$$y' = \frac{1}{1+x+x^2} \Rightarrow y'' = -\frac{1+2x}{1+x+x^2} > 0 \Rightarrow \frac{1+x+x^2}{1+x+x^2} > 0 \Rightarrow -1-2x > 0 \Rightarrow x < -\frac{1}{2} \Rightarrow (-\infty, -\frac{1}{2})$$

۴- گزینه «۳»

اگر $x \rightarrow x-6$ داریم:

$$\begin{aligned} \text{انتگرال} &= \int_0^{1/2} \frac{\sqrt{[x-6]+9}}{\sqrt{[x-6]+9} + \sqrt{[-x+6]+9}} dx = \int_0^{1/2} \frac{\sqrt{[x+3]}}{\sqrt{[x+3]} + \sqrt{[-x+15]}} dx = \int_0^{1/2=a} \frac{f(x)}{f(x) + f(a-x)} dx \\ &\text{که جواب انتگرال برابر } \frac{a}{2} = \frac{1/2}{2} = \frac{1}{4} = 6 \text{ می باشد. یادآوری:} \end{aligned}$$

$$\int_0^a \frac{f(x)}{f(x) + f(a-x)} dx = \frac{a}{2}$$

۵- گزینه «۱»

برای رد کردن گزینه ۲، $\sum \frac{1}{n^2}$ را در نظر بگیرید. * برای رد کردن گزینه ۳، $\sum \frac{1}{n^2}, \sum \frac{1}{n}$ هم رفتار نیستند. همچنین

$\sum \frac{1}{n^3}, \sum \frac{1}{n}$ هم رفتار نیستند پس ۴ نیز رد می شود.

اما برای اثبات گزینه ۱ پون $\sum a_n^2$ همگراست پس $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ پس اگر n به اندازه کافی بزرگ باشد.

$a_n \rightarrow 0$ یعنی $0 < a_n < 1$ پس $0 < a_n^2 < a_n$ و داریم:

$$\sum a_n^2 < \sum a_n \xrightarrow{\text{همگرا}} \sum a_n$$

۶- گزینه «۲»

از توازی داریم:

$$\begin{aligned}(\vec{a}-\vec{c})\parallel(\vec{a}-\vec{b})&\Rightarrow(\vec{a}-\vec{c})\times(\vec{a}-\vec{b})=0\\&\Rightarrow\vec{a}\times\vec{a}-\vec{a}\times\vec{c}-\vec{b}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{c}=0\Rightarrow\vec{b}\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{a}\\&\Rightarrow\vec{b}\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}-\vec{a}\times\vec{b}=(\hat{e}_1,\hat{e}_2,\hat{e}_3)-(\hat{e}_2,\hat{e}_1,\hat{e}_3)=(\hat{e}_1,-\hat{e}_1,\hat{e}_2)\end{aligned}$$

۷-گزینه «۳»

$$\begin{aligned} \text{حد داده شده} &= \lim_{xy \rightarrow 0} e^{\frac{1}{xy}(\cos(xy) - \overbrace{x \sin y}^{xy} - 1)} = e^{\frac{1}{xy}((\frac{xy}{2})^2 - (xy))} \\ &= \lim_{xy \rightarrow 0} e^{\frac{\frac{u^2}{2} - u}{u}} = \lim_{u \rightarrow 0} e^{\frac{-u}{u}} = e^{-1} \end{aligned}$$

۱-گزینه «۲»

$$\begin{aligned} \nabla f &= \left(\sqrt{r} x^{\sqrt{r}-1} \cdot y^{\sqrt{r}}, \sqrt{r} x^{\sqrt{r}} \cdot y^{\sqrt{r}-1}, \sqrt{r} \right) \Big|_{(1,1,1)} = (\sqrt{r}, \sqrt{r}, \sqrt{r}) \\ \Rightarrow |\nabla f| &= \sqrt{\lambda} \Rightarrow \cos = \frac{x}{|\nabla f|} = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{r} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{r} \end{aligned}$$

۹-گزینه «۳»

واضح است $I_1 = \iint \frac{ye^x + ye^y}{e^x + e^y} dA$ با $I_2 = \iint \frac{ye^y + ye^x}{e^y + e^x} dA$ برابر است! پس:

$$I_1 + I_2 = 2I_1 = \iint \partial dA = \partial (\text{مساحت ربع دایره}) = \Delta \left(\frac{2\pi}{4} \right) = \frac{\Delta\pi}{4}$$

$$\Rightarrow 2I_1 = \frac{\Delta\pi}{2} \Rightarrow I_1 = \frac{\Delta\pi}{4}$$

۱۰-گزینه «۴»

$$\begin{aligned} \int (x+y) ds &= \int_0^{\sqrt{\pi}} f(\alpha(t)) |\alpha'(t)| dt = \int_0^{\sqrt{\pi}} (t + (1 - \cos t) \sqrt{x'^2 + y'^2}) dt \\ &= \int_0^{\sqrt{\pi}} (t - \sin t + 1 - \cos t) \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} dt = \int_0^{\sqrt{\pi}} (t - \sin t + 1 - \cos t) \left| \sin \frac{t}{2} \right| dt \\ &= \int_0^{\sqrt{\pi}} \left(t + 1 - 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} - (2 \cos^2 \frac{t}{2} - 1) \sin \frac{t}{2} \right) dt = \int_0^{\sqrt{\pi}} t \sin \frac{t}{2} + 2 \sin \frac{t}{2} - 2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} - 2 \sin \frac{t}{2} \cos^2 \frac{t}{2} \\ &= 2(-t \cos \frac{t}{2} + \sin \frac{t}{2} - \cos \frac{t}{2} - \frac{1}{2} \sin \frac{t}{2} + \frac{1}{2} \cos^2 \frac{t}{2}) \Big|_0^{\sqrt{\pi}} = \lambda \pi + \frac{3\sqrt{\pi}}{2} \end{aligned}$$

۱۱-گزینه «۴»

داریم $\sin \frac{1}{n} \rightarrow 0$ و چون $-1 \leq \cos n \leq 1$ پس $-\frac{1}{3} \leq \frac{1}{3} \cos n \leq \frac{1}{3}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{\sin \frac{1}{n} + \frac{1}{3} \cos n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} \cos n \right)^n \stackrel{\text{پایه باید مثبت باشد}}{=} \stackrel{0 \leq \frac{1}{3} \cos n < 1}{=} 0.$$

۱۲-گزینه «۲»

$$\begin{aligned} \int f(x) \sin x \, dx &= -f(x) \cos x + f'(x) \sin x - \int f''(x) \sin x \, dx \\ \Rightarrow \int (f'(x) + f''(x) \sin x) &= -f(x) \cos x + f'(x) \sin x \Big|_0^\pi = f(\pi) + f(0) \\ \Rightarrow \mathfrak{F} &= f(\pi) + f(0) \Rightarrow \mathfrak{F} = f(\pi) + 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(\pi) = 3$$

مشتق	انتگرال
$f(x)$	$\sin x$
$f'(x)$	$-\cos x$
$f''(x)$	$-\sin x$

۱۳- گزینه «۳»

$$\begin{aligned} \sqrt{1-2\sin^2 x + 3\cos^2 x} &= \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\cos^2 x - 2\sin^2 x} = \sqrt{\sin^2 x + 4\cos^2 x - 4\sin x \cos x} = \\ &= \sqrt{(\sin x - 2\cos x)^2} = |\sin x - 2\cos x|, \xrightarrow{\text{ریشه داخل قدر مطلق}} x = \tan^{-1} 2 = k \text{ (tangk = 2)} \end{aligned}$$

پس داریم:

$$\text{انتگرال داده شده} = \int_0^k (-\sin x + 2\cos x) dx + \int_k^\pi (\sin x - 2\cos x) dx = 2\cos k + 4\sin k - 3 \quad (I)$$

و داریم:

$$1 + \tan^2 k = \frac{1}{\cos^2 k} \Rightarrow 1 + 4 = \frac{1}{\cos^2 k} \Rightarrow \cos k = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin k = \sqrt{1 - \cos^2 k} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

با قرار دادن مقادیر فوق در I حاصل $2\sqrt{5} - 3$ خواهد شد.

۱۴- گزینه «۲»

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}\ln x \rightarrow y' = x - \frac{1}{4x}$$

$$\text{المان طول قوس: } ds = \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{1 + \left(x - \frac{1}{4x}\right)^2} dx = \sqrt{\left(x + \frac{1}{4x}\right)^2} dx = \left(x + \frac{1}{4x}\right) dx$$

$$\Rightarrow \text{طول قوس: } \int_1^2 ds = \int_1^2 \left(x + \frac{1}{4x}\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}\ln x\right]_1^2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{4}\ln 2$$

۱۵- گزینه «۱»

طبق آزمون ریشه برای همگرایی باید $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$ پس:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left|(n+1)^2 \left(\frac{x}{x+2}\right)^n\right|} < 1 \Rightarrow \left|\frac{x}{x+2}\right| < 1 \Rightarrow x > -1 \Rightarrow \text{همگرا}$$

واضح است سری قدرمطلق با خودسری برابرست پس همگرایی برای $x > -1$ مطلق است.

۱۶- گزینه «۲»

$$A \text{ برای } \int_1^\infty \frac{|\sin x|}{x^2 + \sqrt{x}} dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx \rightarrow \text{همگراست} \Rightarrow B \text{ همگرای مطلق}$$

$$B \text{ برای } \int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx \xrightarrow{\text{طبق مثال کتاب ریاضی ماهان}} \text{همگراست.}$$

۱۷- گزینه «۱»

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n)^2} &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{1}{4} \left(-1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \dots \right) \\ &= -\frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots \right) = -\frac{1}{4} \left(\frac{\alpha}{2} \right) = -\frac{\alpha}{8} \end{aligned}$$

۱۸- گزینه «۳»

صفر درجه صورت < مخرج $\lim_{\substack{y^2=u \\ (x,y) \rightarrow (0,0^+)}} \frac{x^2 \sqrt{u}}{x^2 + u^2}$ حد داده شده

۱۹-گزینه «۱»

$$\nabla f = \left(2ye^x, 2e^x + \frac{1}{y} \right) \Big|_{(0,1)} = (2, 3)$$

پس بردار u همان بردار گرادیان به صورت $\frac{1}{\sqrt{13}}(2, 3)$ می باشد و داریم:

$$DF(A).u = \nabla f(A).u = (2, 3) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}} \right) = \frac{4+9}{\sqrt{13}} = \frac{13}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$$

۲۰-گزینه «۴»

اگر u همگن از درجه α و V همگن از درجه β و $h = u + v$ باشد می توان نشان داد که:

$$x^2 \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \alpha(\alpha-1)u + \beta(\beta-1)v$$

قرار دهید $u = f\left(\frac{y}{x}\right)$ که همگن درجه صفر و $v = xg\left(\frac{y}{x}\right)$ که همگن درجه یک می باشد پس:

$$x^2 h_{xx} + 2xy h_{yx} + y^2 h_{yy} = \alpha(\alpha-1)u + \beta(\beta-1)u \underset{\beta=1}{=} 0 = 0$$



سوالات چهارگزینه‌ای کنکور سراسری عمران سال ۹۶

۱- حاصل عبارت $(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i})^{10}$ کدام است؟ ($i = \sqrt{-1}$)

- (۱) $\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ (۲) $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ (۳) $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ (۴) $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

۲- فرض کنید تابع g در R پیوسته بوده و $\int_0^1 g(t)dt = 2$ اگر $f(x) = \frac{1}{x} \int_0^x (x-t)^2 g(t)dt$ باشد، حاصل $f''(1)$ کدام است؟

- (۱) ۲ (۲) ۴ (۳) -۲ (۴) -۴

۳- حاصل انتگرال $I = \int_0^{\pi} \sqrt{1-2\sin 2x + 3\cos^2 x} dx$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) $2\sqrt{5}+3$ (۴) $2\sqrt{5}-3$

۴- مقدار انتگرال $\int_{-6}^6 \frac{\sqrt{\lfloor x \rfloor + 9}}{\sqrt{\lfloor x \rfloor + 9} + \sqrt{\lfloor -x \rfloor + 9}} dx$ کدام است؟ ($\lfloor x \rfloor$ جزء صحیح x است)

- (۱) صفر (۲) ۳ (۳) ۶ (۴) ۹

۵- فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی مثبت باشد. کدام گزینه همواره صحیح است؟ ($n = 1, 2, \dots$)

(۱) اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ همگرا باشد آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ نیز همگرا است.

(۲) اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ همگرا باشد آنگاه سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ نیز همگرا است.

(۳) دو سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ همرفتارند.

(۴) دو سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ همرفتارند.

۶- فرض کنید $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ سه بردار در فضا باشند، به طوری که $\vec{a} - \vec{c}, \vec{a} - \vec{b}$ با هم موازی‌اند و $\vec{a} \times \vec{c} = (0, -1, 3), \vec{a} \times \vec{b} = (-2, 0, 1)$ باشد، در این صورت $\vec{b} \times \vec{c}$ کدام است؟

- (۱) $(-2, 1, -2)$ (۲) $(2, -1, 2)$ (۳) $(2, 1, -4)$ (۴) $(-2, -1, 4)$

۷- حاصل $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{xy} [\cos(xy) - x \sin y]$ کدام است؟

- (۱) ۰ (۲) ۱ (۳) $\frac{1}{e}$ (۴) e

۸- اگر $f(x, y, z) = x^{\sqrt{2}} \times y^{\sqrt{3}} + \sqrt{3}z$ آنگاه بردار $\vec{\nabla} f(1, 1, 1)$ با محور x ها چه زاویه‌ای می‌سازد؟

- (۱) $\frac{\pi}{2}$ (۲) $\frac{\Delta\pi}{2}$ (۳) $\frac{\pi}{4}$ (۴) $\frac{\pi}{6}$

۹- مقدار انتگرال $\iint_D \frac{xe^x + ye^y}{e^x + e^y} dx dy$ کدام است که در آن ناحیه D $x^2 + y^2 \leq 2$ و $x \geq 0, y \geq 0$ می‌باشد؟

- (۱) $\Delta\pi$ (۲) $\frac{\Delta\pi}{2}$ (۳) $\frac{\Delta\pi}{4}$ (۴) $\frac{\Delta\pi}{8}$