به نام خداوند بخشنده مهربان

آمادگی آزمون دکتری

آمار و روش تحقیق

(پیشرفته کمی و کیفی)

مجموعه:

علوم اجتماعی

مؤلف:

گروه مولفین ماهان

ماهان
مشاوران صعود

گروه مولفین ماهان

آمار و روش تحقیق پیشرفته کمی و کیفی مجموعه علوم اجتماعی / دکتر نظام بهرامی کمیل

مشاوران صعود ماهان: ۱٤۰٤

٤٥٧ص: جدول، نمودار (آمادگی آزمون دکتری مجموعه علوم اجتماعی)

ISB/N: 978-600-458-650-4

فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا.

فارسی ـ چاپ اول

۱-آمار و روش تحقیق پیشرفته کمی و کیفی ۲- آزمونها و تمرینها

۲- آزمون دوره‌های تحصیلات تکمیلی ۴-دانشگاه‌ها و مدارس عالی ـ ایران ـ آزمونها

ج ـ عنوان

کتابشناسی ملی ٤٤۱۸۲٤۰

انتشارات مشاوران صعود ماهان

موسسه آموزش عالی آزاد ماهان www.mahan.ac.ir

- **نام کتاب:** آمار و روش تحقیق پیشرفته کمی و کیفی
- **مدیر مسئولان:** مجید و هادی سیاری
- **مولف:** گروه مولفین ماهان
- **مدیر تولید و محتوا:** سمیه بیگی
- **ناشر:** مشاوران صعود ماهان
- **نوبت و تاریخ چاپ:** اول /۱۴۰۴
- **تیراژ:** ۱۰۰۰ نسخه
- **قیمت:** ۶/۷۲۰/۰۰۰ ریال
- **شابک:** ISBN۹۷۸-۶۰۰-۴۵۸-۶۵۰-۴

انتشارات مشاوران صعود ماهان:تهران ـ خیابان ولیعصر، بالاتر از تقاطع ولیعصر مطهری، پلاک ۲۰۵۰

تلفن: ۸۸۱۰۰۱۱۳ و ۸۸۴۰۱۳۱۳

مقدمه ناشر

بنام خدا

ایمان داریم که هر تغییر و تحول بزرگی در مسیر زندگی بدون تحول معرفت و نگرش میسر نخواهد بود. پس بیایید با اندیشه توکل، تفکر، تلاش و تحمل در توسعه دنیای فکریمان برای نیل به آرامش و آسایش توأمان اولین گام را برداریم. چون همگی یقین داریم دانایی، توانایی می‌آورد.

شاد باشید و دلی را شاد کنید

برادران سیاری

پیشگفتار:

سابقه تدریس نگارنده در درس روش تحقیق به سال ۱۳۸۰ و آموزشگاه بسیج دانشجویی دانشگاه تهران (کوثر) باز می‌گردد. در آن سال تدریس روش تحقیق برای متقاضیان کارشناسی ارشد رشته پژوهش علوم اجتماعی به‌عهده گرفتم. در سال‌های بعد جزوات آموزشی به نام «گام به گام محقق شویم» را برای سازمان عقیدتی سیاسی نیروی انتظامی تألیف کردم و بالاخره تدریس روش تحقیق را از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۸۹ در کنار تدریس دروس نظریه‌ها و حوزه‌های جامعه‌شناسی در آموزشگاه آزاد علمی ماهان ادامه دادم. با تستی شدن آزمون دکترا، تدریس در مقطع دکترا دیگر چندان منطقی نبود زیرا پرسش‌های باز و تحلیلی جای خود را به پرسش‌های چهار گزینه‌ای داده بود. از آنجا که امکان تدریس در دانشگاه هم فراهم نشد و خاک خوردن مطالبی که در طول چند سال تهیه کرده بودم درست نبود، در نهایت تصمیم به انتشار آن در قالب یک کتاب کمک آموزشی گرفتم. هر چند در تهیه این کتاب حداقل پنجاه کتاب روش تحقیق بطور کامل و ده‌ها کتاب و جزوه هم به‌طور گذار مطالعه شده است اما شاید بتوان گفت حدود نیمی از مطالب کتابی که در دست دارید از چند منبع بسیار خوبی است که در انتهای کتاب فهرست شده است. امیدوارم این اثر بتواند ضمن کمک به داوطلبان کنکور مقطع دکترا و همچنین کارشناسی ارشد، ترس و وحشت درس روش تحقیق را برای خوانندگان به علاقه و دوستی تبدیل کند.

فصل اول

آمار، احتمالات و نمونه‌گیری

آنچه که در این فصل می‌خوانیم

- ☑ گفتار اول: آمار
- ☑ گفتار دوم: احتمالات
- ☑ گفتار سوم: نمونه‌گیری

گفتار اول

آمار

آمار: (Statistics)

آمار به ما کمک می‌کند تا داده‌های فراوان را در چند عدد خلاصه کنیم. برخی نیز گفته‌اند آمار، علم گردآوری، تنظیم، نشان دادن و تحلیل داده‌های عددی مربوط به جامعه است. آمار توصیف پدیده‌ها به شکل کمی و عددی است که ابتدا محقق مساله‌ای را مطرح می‌کند و سپس یک پاسخ حدسی به نام فرضیه را به این مساله و سوال می‌دهد. بعد فرضیه‌آزمایی می‌کند که در این مرحله به گردآوری اطلاعات پرداخته می‌شود. تکنیک‌های مختلفی برای گردآوری اطلاعات هست و سپس به کمک آمار اطلاعات به دست آمده را طبقه‌بندی می‌کنیم.

۱- آمار توصیفی: (Descriptive Statistics) به توصیف یافته‌ها یا اطلاعات تهیه شده از جوامع آماری می‌پردازد و به صورت جدول توزیع فراوانی‌ها، نمودارها، شاخص‌های گرایش به مرکز یعنی نما، نیمساز و میانگین و شاخص‌های پراکندگی یعنی واریانس، انحراف معیار و دامنه قابل مشاهده است.

۲- آمار استنباطی: (Inferential Statistics) به تعمیم یافته‌ها از نمونه به جامعه می‌پردازد.

ـ آمار استنباطی، برآورد خصوصیتی از جمعیت بر پایه خصوصیتی در نمونه است.

ـ آمار استنباطی، آزمون فرضیه درباره رابطه بین دو متغیر در جمعیت بر پایه نمونه است.

فرضیه‌هایی که ما داریم یا در کل جمعیت مورد آزمایش و استفاده قرار می‌گیرد و یا در یک نمونه‌ای از جمعیت؛ بنابراین تحقیق دو نوع است:

(۱) سرشماری یا همه‌پرسی یا تمام‌شماری: محقق به تمام افراد رجوع می‌کند و از یک یک آنها اطلاعات می‌گیرد و به کمک آمار توصیفی به تجزیه و تحلیل می‌پردازد.

(۲) نمونه‌گیری: در این شیوه از کل افراد نمونه‌ای انتخاب می‌کنیم. به کمک آمار توصیفی نمونه را توصیف می‌کنیم و بعد به کمک آمار استنباطی نتیجه‌ای که از نمونه به دست آوردیم را به کل افراد تعمیم می‌دهیم؛ بنابراین هنگامی به آمار استنباطی نیاز داریم که تحقیق از نوع نمونه‌گیری است.

تفاوت آمار توصیفی با استنباطی:

در آمار توصیفی محقق از طریق استفاده از موازین مشخص آماری، به توصیف و توجیه ویژگی‌های موردنظر می‌پردازد، بدون آنکه قصد تعمیم نتایج به جوامع بزرگتر را داشته باشد ولی در آمار استنباطی با استفاده از آزمون‌های آماری و برآوردها، نتایج نمونه را به کل تعمیم می‌دهیم.

جمعیت آماری: کلیه اجزا و عناصر که حداقل در یک صفت مشترک باشند یا به عبارت دیگر مجموعه‌ای از افراد جامعه که در یک یا چند صفت مشترک باشند.

جمعیت نامحدود: جمعیتی است که قابل شمارش نیستند یا یک یک آنها را برداریم به انتها نمی‌رسیم. مثال: برگهای درختان کره زمین، جمعیت ستارگان آسمان، جمعیت ایران که در واقع جمعیتی است که هر قدر می‌شماریم و جلوتر می‌رویم از آن طرف اضافه می‌شود.

جمعیت محدود: جمعیتی است که قابل شمارش است. مثال: دانشجویان دانشکده علوم اجتماعی علامه یا درختان خیابان ولی‌عصر.

نمونه: مجموعه نسبتا کوچک افراد یا اعضای جمعیت که به شکل خاص انتخاب می‌شوند.

عنصر یا واحد آماری: به هر یک از اعضای جمعیت، واحد آماری گفته می‌شود.

فرضیه در تحقیق و فرضیه آماری: اصل صرفه‌جویی در آمار مطرح است، یعنی با کمترین منابع حداکثر نتایج را به‌دست آوریم. به‌همین خاطر به نمونه‌گیری می‌پردازیم یا سرشماری را هر چند سال یکبار انجام می‌دهیم. در همین راستا برای تبیین پدیده خودکشی نمی‌توان ۳۰۰ متغیر را مطرح کرد و آنها را در امر خودکشی موثر دانست. بلکه باید بتوانیم حداکثر با ۴ یا ۵ متغیر ۸۰ تا ۹۰ درصد پدیده خودکشی را تبیین کنیم.

- اهداف آمار استنباطی
  - ۱- برآورد: تخصیص عدد به پارامتر بر اساس آماره
    - ۱- برآورد نقطه‌ای
    - ۲- آزمون دامنه‌ای: برای موضوعات پزشکی مانند قند خون
  - ۲- آزمون فرضیه
    - ۱- تدوین و صورت‌بندی کردن فرضیات
    - ۲- انتخاب و تعیین آزمون آماری مناسب
    - ۳- تعیین معیار تصمیم‌گیری در مورد فرضیات صورت‌بندی شده
    - ۴- مقایسه نتایج آزمون آماری با معیارهای تعیین شده
    - ۵- تصمیم‌گیری

فرضیه آماری:

فرضیه پاسخ حدسی و موقتی، اما معقول و اندیشیده به مساله تحقیق است. هر تحقیق فرضیه ندارد و ممکن است پرسش داشته باشد. برای مثال: ازدواج در فلان روستا چگونه است؟ مردم در مقابل خرافات چگونه عمل می‌کنند؟ تحقیقات توصیفی فرضیه ندارند. اما بعضی تحقیقات، فرضیه آزمایشی دارند که در آنها به دنبال رابطه بین متغیرها می‌باشیم که تحقیقات استنباطی و تحلیلی از این جمله‌اند. مثال: آیا بین خانم‌ها و آقایان دانشجو از لحاظ میزان مطالعه فرقی است؟

- با کلمات نوشته نمی‌شود، بلکه با نمادها و سمبل‌های آماری و ریاضی نوشته می‌شود.
- فرضیه آماری بر حسب پارامترها نوشته می‌شود، نه آماره‌ها.
- فرضیه آماری از سه جنبه باید مورد توجه باشد:

الف) شکل منطقی ب) شکل جهتی ج) شکل مقایسه‌ای

۱. شکل منطقی:

هر فرضیه آماری وقتی که نوشته می‌شود بلافاصله فرضیه‌ای خنثی نیز با آن خود به خود نوشته می‌شود. یعنی هر فرضیه‌ای همزاد خود را یا نقیض خود را به همراه دارد. به فرضیه خنثی یا نفی‌کننده یا پوچ اصطلاحا فرضیه صفر می‌گویند و آن را با H_0 نشان می‌دهند. نظر محقق در قالب فرضیه‌ای عنوان می‌شود که به آن فرضیه مقابل صفر یا مخالف صفر یا جانشین صفر گفته می‌شود و آن را با H_1 نمایش می‌دهند.

H_1: بین جنس دانشجو و میزان مطالعه رابطه وجود دارد.

H_0: بین جنس دانشجو و میزان مطالعه رابطه وجود ندارد. در مسایل آماری متفاوت درباره جمعیت بر حسب H_0 صورت می‌گیرد. مثلا می‌گوییم نمی‌توان H_0 را رد کرد یا در این تحقیق می‌توان H_0 را رد کرد. اگر متغیر از جنس اسمی باشد آن را با کلمات می‌نویسیم.

بین جنس دانشجو و میزان مطالعه رابطه وجود ندارد. ($\rho_{xy} = 0$).

بین جنس دانشجو و میزان مطالعه رابطه وجود دارد ($\rho_{xy} \neq 0$)

همبستگی پیرسن است که همیشه بر حسب پارامترها نوشته می‌شود:

مثال: بین میانگین هوش دانشجویان علوم اجتماعی و میانگین هوش دانشجویان علوم طبیعی تفاوت وجود دارد.

$H_1 = \mu_S \neq \mu_N$ $H_0 = \mu_S = \mu_N$

۲. شکل جهتی: فرضیه آماری یا بدون جهت است یا جهت‌دار فرضیه جهت‌دار فرضیه‌ای است که سمت و سوی حرکت متغیرها را نیز تعیین می‌کند و فرضیه بدون جهت به سمت و سوی حرکت متغیرها اشاره‌ای ندارد.

مثال برای جهت‌دار: افراد مسن حافظه ضعیف‌تری از افراد جوان دارند. یعنی بین سن و حافظه رابطه معکوس یا منفی برقرار است. سن ↑ حافظه ↓

بین میزان مطالعه دانشجو و میزان حضور او در کلاس رابطه مثبت یا مستقیم وجود دارد. میزان مطالعه ↑ میزان حضور در کلاس ↓

مثال برای فرضیه بدون جهت‌دار: بین سن و حافظه رابطه وجود دارد یا بین میزان مطالعه و میزان حضور در کلاس رابطه است.

علامت فرضیه جهت‌دار آن است که در آن لفظ رابطه مثبت یا منفی و یا لفظ بیشتر و یا کمتر آمده است. مثال، دختربچه‌ها علاقه بیشتری به عروسک‌بازی دارند تا پسر بچه‌ها میانگین هوش کارگران بیشتر از میانگین هوش کشاورزان است.

۳. شکل مقایسه‌ای: از جنبه مقایسه‌ای فرضیه آماری به دو دسته تقسیم می‌شود:

الف) مقایسه نمونه با جمعیت ب) مقایسه دو یا چند نمونه با یکدیگر

مثال برای الف: افراد مجرد هوش بیشتری از متوسط هوش جمعیت دارند.

مثال برای ب: مهارت شغلی کارمندان مرد بیشتر از مهارت شغلی کارمندان زن است که باید به صورت پارامترهای آماری نوشته شود:

$H_1 = \mu_{\text{مردان}} > \mu_{\text{زنان}}$ $\qquad$ $H_0 = \mu_{\text{مردان}} = \mu$ ،

هر فرضیه‌ای که شکل منطقی، جهتی و مقایسه‌ای دارد:

$\rho_{xy} = 0$ = فعل مثبت

$\rho_{xy} \neq 0$ = فعل منفی

H_1: معمولا فعل مثبت دارد ولی H_0 معمولا فعل منفی دارد.

۱) متوسط هوش کودکان دبستان ایثار بیشتر از متوسط کودکان مدارس تهران است. H_1 ـ جهت‌دار ـ مقایسه نمونه با جمعیت

۲) بین میزان تحصیلات افراد نمونه با میزان تحصیلات جمعیت که این نمونه از آن گرفته شده است، تفاوت وجود دارد. H_1 ـ بدون جهت ـ مقایسه نمونه با جمعیت

۳) بین شدت علاقه دانشجویان زن و مرد تفاوت وجود دارد. H_1 ـ بدون جهت ـ دو نمونه با هم

۴) بین متوسط IQ مردان دانشجو و متوسط IQ جمعیت مردان اختلاف وجود دارد. H_1 ـ بدون جهت ـ نمونه با جمعیت

۵) بین جنس دانشجو و میزان مشارکت سیاسی او رابطه وجود دارد. H_1 ـ بدون جهت ـ دو نمونه با هم

همان‌طورکه گفتیم آمار استنباطی برداشت‌های حدسی از جمعیت براساس نمونه است.

اشتباه در تصمیم‌گیری‌های استنباطی: تصمیم استنباطی براساس اطلاعاتی که از نمونه به دست می‌آید صورت می‌گیرد، اما اینکه تصمیم‌گیری استنباطی یا حدسی ما در مورد جمعیت درست یا غلط است تنها وقتی معلوم می‌شود که از وضعیت واقعی جمعیت با اطلاع باشیم. مثلا فرض کنید که اطلاعات حاصل از نمونه ما را به این تصمیم استنباطی برساند که بگوییم در جمعیت دانشجویان، دانشجویان زن از دانشجویان مرد بیشتر مطالعه می‌کنند. اما اگر درون جمعیت آماری عکس این مطلب درست باشد یعنی مردان دانشجو از زنان دانشجو بیشتر مطالعه کنند، آنگاه تصمیم استنباطی ما در مورد پذیرش فرضیه خود در مورد جمعیت اشتباه خواهد بود. البته معمولا پژوهشگر از وضعیت واقعی جمعیت آماری اطلاعی ندارد و اگر اطلاع داشت دیگر نیازی به تحقیق کردن نبود.

شاخص‌های تمرکز و پراکندگی:

برای خلاصه کردن داده‌های یک سری مشاهده دو گونه اندازه‌گیری وجود دارد: اندازه‌های گرایش به مرکز و تغییرپذیری (پراکندگی).

۱. اندازه‌های گرایش به مرکز:

هر مجموعه داده‌ای چند شاخص گرایش به مرکز دارد. مهمترین اندازه‌های گرایش به مرکز که نقطه تمرکز توزیع صفت را مشخص می‌کنند، عبارتند از: نما، میانگین و میانه. چنین عددی به یک معنا با یافتن مقداری در نقطه میانی داده‌ها، آنها را خلاصه می‌کند.

نما: مقداری از متغیریست که تعداد مشاهدات آن حداکثر است. برای مثال در یک کلاس ۲۰ نفره که ۷ نفر نمره ۱۵، ۳ نفر نمره ۱۷، ۵ نفر نمره ۱۲، ۲ نفر نمره ۸ و ۳ نفر نمره ۶ گرفته باشند، نما نمره ۱۵ است، زیرا بیشترین فراوانی را دارد.

میانگین: مهمترین شاخص گرایش به مرکز، مقدار متوسط (Average) یا میانگین (Mean) یعنی $\bar{x}$ است. برای محاسبه آنها تمام مقادیر داده‌ها را با هم جمع می‌کنیم و سپس حاصل را بر تعداد کل مقادیر یعنی n تقسیم می‌کنیم.

مثال: شمار سالهایی که شش بیمار پس از تشخیص ابتلا به سرطان زنده مانده‌اند به شرح زیر است:

۱/۷ ۳/۲ ۲/۱ ۴/۶ ۱/۴ ۲/۸

بنابراین میانگین مدت زنده ماندن (به سال) این بیماران عبارت است از:

$$\bar{x}=\frac{1}{6}(1/7+3/2+2/1+4/6+1/4+2/8)=\frac{15/8}{6}=2/63$$

یعنی اینکه:

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

که $n=6$، $x_1=1/7$، $x_2=3/2$، ...، $x_6=2/8$.

حرف یونانی سیگما (Σ) به این معنی است: «آنچه را که در پی می‌آید جمع کن»؛

i اندیسی است که در این مثال مقادیری بین $i=1$ تا $i=n$ دارد.

$$\sum_{i=1}^{6} x_i^2=(1/7)^2+(3/2)^2+(2/1)^2+(4/6)^2+(1/4)^2+(2/8)^2$$

$$=2/89+10/24+4/41+21/16+1/96+7/84=48/5$$

$$\sum_{i=1}^{i} c=c+c+\ldots+c\ (n)=nc$$

$$\sum_{i=1}^{n} 1=n$$

میانگین وزنی: (Weighted Average) میانگین وزنی را هنگامی به کار می‌بریم که بخواهیم میانگین تقریبی را پیدا کنیم. در مثال زیر میانگین وزنی چهار مقدار x_1 تا x_4 را محاسبه کرده‌ایم:

j	۱	۲	۳	۴
w_j	۲	۱	۶	۱
x_j	۳	۴	۲	۴

میانگین وزنی مقادیر x_j، با ضرایب وزنی w_j به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{میانگین وزنی } = \frac{\sum_{j=1}^{4} w_j x_j}{\sum_{j=1}^{4} w_j} = \frac{(2\times3)+(1\times4)+(6\times2)+(1\times4)}{2+1+6+1} = \frac{26}{10} = 2/6$$

یعنی میانگین وزنی عبارت است از: مجموع وزنی تقسیم بر مجموع وزنها. (اگر هر $w_j = 1$ باشد، میانگین وزنی همان میانگین معمولی می‌شود.)

داده‌های جدول زیر را در نظر بگیرید:

طبقه (x_j)	فراوانی (f_j)	$f_j x_j$
۳	۵	۱۵
۴	۱۲	۴۸
۵	۲	۱۰
۶	۱	۶
جمع	$\sum_{j=1}^{4} f_j = 20$	$\sum_{j=1}^{4} f_j x_j = 79$

میانگین وزنی داده‌های فوق، با گذاشتن فراوانی هر عدد به جای وزن آن، عبارت است از:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^{4} f_j x_j}{\sum_{j=1}^{4} f_j} = \frac{79}{20} = 3/95$$

راه دیگر آن است که همه ۲۰ داده را با هم جمع و تقسیم بر ۲۰ کنیم.

توجه کنید که چگونه در میانگین وزنی اهمیت نسبی هر یک از مقادیر به حساب می‌آید و نیز اینکه مقدار ۳/۹۵ مقداری «نوعی» برای مجموعه داده‌ها محسوب می‌شود، زیرا شاخص خوبی برای گرایش به مرکز است.

میانه: شاخص دیگر گرایش به مرکز میانه (Median) است، یعنی مقدار میانی مجموعه‌ای از داده‌ها که از کوچک به بزرگ یا به عکس مرتب شده‌اند. مثال زیر مفهوم میانه را روشن می‌سازد.

تعدادی داده داریم که عبارتند از: ۹۵، ۸۶، ۷۸، ۹۰، ۶۲، ۷۳ و ۸۹. این داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

۶۲ ۷۳ ۷۸ ۷۶ ۸۹ ۶۰ ۹۵

میانه، عدد ۷۶ یعنی مقدار وسطی است.

اگر مثلا به جای عدد ۶۲ عدد ۵ را بگذاریم میانه هیچ تغییری نمی‌کند اما میانگین کاهش می‌یابد.

اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، میانگین دو مقدار وسط را به جای میانه می‌گیریم. مثلا میانه داده‌های ۶۲، ۷۳، ۷۳، ۷۸، ۸۶، ۸۹، ۹۰ و ۹۵ عبارت است از:

$$\frac{78+86}{2} = 82$$

میانه داده‌های طبقه‌بندی شده

طبقه	f_j
$۹۴/۵-(۹۹/۵)$	۳
$۸۹/۵-(۹۴/۵)$	۴
$۸۴/۵-(۸۹/۵)$	۱۲
$۷۹/۵-(۸۴/۵)$	۱۰
$۷۴/۵-(۷۹/۵)$	۹
$۶۹/۵-(۷۴/۵)$	۶
$۶۴/۵-(۶۹/۵)$	۲
$۵۹/۵-(۶۴/۵)$	۴
جمع	$n=۵۰$

میانه داده‌های طبقه‌بندی شده را قبلا نشان داده‌ایم. مقدار میانی $\frac{n}{۲}=۲۵$ است. (اگر n فرد باشد این مقدار عدد صحیح نخواهد بود.) در اینجا ۲۱ نمره کمتر از ۷۹/۵ و ۳۱ نمره کمتر از ۸۴/۵ است؛ بنابراین میانه در طبقه $(۸۴/۵)-۷۹/۵$ قرار دارد. در واقع $\frac{۴}{۱۰}$ این فاصله ۵ نمره‌ای موردنیاز است؛ بنابراین:

$$\text{میانه داده‌های طبقه‌بندی شده}=۷۹/۵+\frac{۴}{۱۰}(۵)=۸۱/۵$$

این مقدار را با میانگین ۸۰/۶ که در صفحه قبل به دست آوردیم مقایسه کنید. در کل:

$$\text{میانه داده‌های طبقه‌بندی شده}=L+\frac{\left(\frac{۴}{۲}n-f_c\right)}{f_j}W$$

که:

L: حد پایینی طبقه‌ای است که میانه در آن قرار دارد.

f_j: فراوانی آن طبقه

W: فاصله آن طبقه

f_c: فراوانی تراکمی پایین‌تر از L است.

$\left(\frac{۱}{۲}n-f_c\right)$ تعداد مقادیر کمتر از میانه در طبقه حاوی میانه است.

۲. اندازه‌های تغییرپذیری:

یکی از اندازه‌های ساده و ابتدایی تغییرپذیری، دامنه Range داده‌هاست که از تفاضل کمترین و بیشترین مقدار مجموعه داده‌ها به‌دست می‌آید. این شاخص به مقادیر کرانی Extreme بسیار حساس است.

اندازه دیگر، میانگین مجذور انحراف‌ها است و از فرمول $\frac{۱}{n}=\sum_{i=۱}^{n}(x_i-\bar{x})^۲$ به‌دست می‌آید که n تعداد داده‌ها و $\bar{x}$ میانگین آنهاست. اگر همه انحراف‌های از میانگین را با هم جمع کنیم، حاصل آن همیشه مساوی صفر است و نمی‌توان از آن به عنوان شاخص تغییرپذیری استفاده کرد. به همین دلیل هر یک از انحراف‌ها را قبل از جمع کردن به توان دوم می‌رسانیم و سپس میانگین آنها را محاسبه می‌کنیم. اگر برخی از مقادیر، بسیار دور از میانگین باشند مجذور انحراف‌ها بزرگ خواهد شد.

واریانس: مهمترین اندازه تغییرپذیری، یعنی واریانس (Variance) از تقسیم مجموع مجذور انحراف‌ها بر $(n-1)$ به جای n به دست می‌آید. فرمول واریانس که آن را با s^2 نشان می‌دهیم عبارت است از:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

با تقسیم کردن مجموع مجذور انحراف‌ها بر $(n-1)$، برآوردی بدون تورش از واریانس به دست می‌آید.

در داده‌های طبقه‌بندی شده، فرض بر این است که همه مقادیر هر فاصله در مرکز آن فاصله قرار دارند؛ بنابراین:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{k}(x_j - \bar{x})^2 f_j$$

که فاصله‌های طبقه‌ای را با $j=1$ تا $j=k$ شماره‌گذاری می‌کنیم.

خواص واریانس: ۱. اگر یک مقدار ثابت (مثلا عدد ۳) را از تمام مقادیر مورد بررسی کم یا به همه آن‌ها اضافه کنیم، واریانس هیچ تغییری نمی‌کند. ۲. اگر همه مقادیر متغیر را بر یک عدد ثابت تقسیم کنیم، واریانس توزیع جدید ۳ به توان دو برابر از واریانس قدیم کوچکتر می‌شود. مثلا اگر همه اعداد یک مجموعه را بر عدد ۳ تقسیم کنیم، واریانس آن‌ها بر ۹ تقسیم می‌شود. ۳. اگر همه مقادیر را در یک عدد ثابت ضرب کنیم، واریانس جدید ۳ به توان دو برابر واریانس قدیم می‌شود. یعنی واریانس جدید ۹ برابر واریانس قدیم می‌شود.

انحراف معیار: یکی دیگر از اندازه‌های تغییرپذیری انحراف معیار (Standard Deviation) است که با فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$s = \sqrt{\text{واریانس}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

که $(n-1)$ را درجه آزادی می‌نامند.

مزیت انحراف معیار بر واریانس آن است که واحد اندازه‌گیری s با واحد داده‌ها یکی است چون جذر گرفتن از واریانس، اثر به توان دو رساندن داده‌ها را خنثی می‌کند.

مثال: انحراف معیار اعداد ۱، ۸، ۴، ۵ و ۲ را حساب کنید.

i	x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
۱	۱	$۱-۴=-۳$	۹
۲	۸	$۸-۴=۴$	۱۶
۳	۴	$۴-۴=۰$	۰
۴	۵	$۵-۴=۱$	۱
۵	۲	$۲-۴=-۲$	۴
جمع	۲۰	۰	۳۰

$$\bar{x} = \frac{۲۰}{۵} = ۴ \quad \text{و} \quad s = \sqrt{\frac{۳۰}{۴}} = \sqrt{۷/۵} = ۲/۷۴$$

انحراف معیار، انحرافی «نوعی» یا متوسط از میانگین است. حتما توجه کرده‌اید که مجموع انحراف‌های از میانگین همواره مساوی صفر است.

معایب انحراف معیار: ۱. انحراف معیار هیچ وقت کمتر از صفر نمی‌شود. ۲. حد بالای انحراف معیار باز است. ۳. در توزیع‌های دارای چولگی زیاد کارایی آن کم است.

انحراف چارکی: به تفاضل چارک سوم از چارک اول اشاره دارد و یکی از اندازه‌های تغییرپذیری است که با این فرمول مشخص می‌شود: $\text{انحراف چارکی} = \frac{Q_۳ - Q_۱}{۲}$

چارک اول نشان دهنده ۲۵٪ داده‌ها، چارک دوم که همان میانه است نشان دهنده ۵۰٪ داده‌ها و چارک سوم نشان دهنده ۷۵٪ داده‌ها است. انحراف چارکی همان کار انحراف استاندارد را انجام می‌دهد با این تفاوت که برای زمانی بکار می‌رود که ما از میانه Md برای برآورد استفاده می‌کنیم. (انحراف استاندارد برای زمانی است که ما از میانگین استفاده می‌کنیم.)

تذکر: وقتی منحنی نرمال چولگی داشته باشد بهترین آماره میانه Md است و وقتی منحنی نرمال باشد، میانگین بهترین آماره است.

نکته: ۱. نما برای متغیرهای اسمی، میانه برای متغیرهای ترتیبی و میانگین برای متغیرهای فاصله‌ای و نسبی به کار برده می‌شود. ۲. مجموع انحراف نمره‌ها از میانگین، همیشه برابر صفر است، ولی مجموع انحراف نمره‌ها از میانه یا نما همیشه برابر با صفر نیست. ۳. ثبات میانگین بیشتر از نما و میانه است. ۴. با میانگین عملیات ریاضی بیشتری می‌توان انجام داد. ۵. در توزیع‌های چوله بهترین معیار مرکزگرایی میانه است ولی در توزیع‌های نرمال میانگین است.

نکته: میانگین Z (نمرات استاندارد) همیشه صفر و انحراف معیار آن همیشه یک است.

ضریب تغییرات:

نسبت انحراف معیار بر میانگین را ضریب تغییرات می‌نامند و آن را چنین نمایش می‌دهند: $CV = \frac{S}{X}$

ضریب تغییرات برای از بین بردن واحد اندازه‌گیری‌های متفاوت بکار می‌رود. برای مثال فرض کنید در یک کارخانه میانگین و انحراف معیار مزد (x) و ساعت کار (y) هفتگی کارگران به شرح زیر است:

$\bar{y} = ۵۰$ ساعت $\quad S_y = ۱۲/۵$ ساعت

$\bar{X} = ۱۸۰$ دلار $\quad S_x = ۳۶$ دلار

در نتیجه ضریب تغییرات مزد و ساعت کار چنین محاسبه می‌شود:

$$\text{ساعت کار } CV_y = \frac{۱۲/۵}{۵۰} = ۰/۲۵$$

$$\text{مزد } CV_x = \frac{۳۶}{۱۸۰} = ۰/۲$$

از آنجا که هرچه مقدار ضریب تغییرات به صفر نزدیکتر باشد، داده‌ها همگون‌تر است بنابراین مقایسه مانشان می‌دهد که ضریب تغییرات ساعت کار بیشتر از ضریب تغییرات مزد است در حالی که اگر انحراف معیارها را با هم مقایسه می‌کردیم باید عکس آن را نتیجه می‌گرفتیم که کار درستی نبود.

نمرات استاندارد شده: در آمار به نمره‌ای که یک آزمودنی کسب می‌کند نمره خام گفته می‌شود.

برای پی بردن به ارزش و رتبه هر نمره خام باید آن را استاندارد کنیم. یکی از روش‌های استاندارد کردن نمره‌های خام تبدیل نمره خام (X) به نمره استاندارد (z) براساس فرمول زیر است:

$$Z = \frac{X - \bar{X}}{S}$$

مثال: در یک آزمایش میانگین و انحراف معیار نمره‌های یک گروه به ترتیب ۳۲ و ۶ است. نمره خام دو آزمودنی A و B نیز به ترتیب ۲۶ و ۴۴ است. نمره استاندارد هر دو را محاسبه کنید.

$$Z_A = \frac{۲۶ - ۳۲}{۶} = -۱$$

$$Z_B = \frac{۴۴ - ۳۲}{۶} = ۲$$

گفتار دوم

احتمالات

عدم قطعیت جزء لاینفکی از زندگی روزمره است. رویدادهای بسیار معدودی را می‌توان به قطع و یقین پیش‌بینی کرد؛ باقی رویدادهای قابل پیش‌بینی قطعی نیست، مثلا واکنش بیمار به نوعی درمان خاص، طول دوره بیماری، معنای نتایج آزمونی تشخیصی و از این قبیل. احتمال، شاخص یا اندازه عدم قطعیت است. احتمال، عدم قطعیت را به زبان کمیت و بر روی مقیاسی بین ۰ و ۱ بیان می‌کند که ۰ به معنی مطلقا ناممکن و ۱ به معنی صد در صد قطعی است. احتمال را می‌توان به صورت درصد یا تعداد شانس‌ها در ۱۰۰ بیان کرد که در هر صورت مقدار آن بین ۰٪ به معنی مطلقا ناممکن و ۱۰۰٪ به معنی کاملا قطعی متغیر است.

لغات و عبارات بسیاری هست که بیان‌کننده نوعی ارزیابی ذهنی از احتمال است. لغات و عباراتی چون «گاهی»، «قطعا»، «بعید»، «هرگز»، «احتمالا»، «نامعقول»، «همیشه» و از این قبیل که همگی حاوی نظری راجع به احتمال وقوع رویدادی خاص است. در تحقیقی از برخی متخصصان علوم بهداشتی خواسته شد تا کلمات فوق را به صورت عددی تعبیر کنند. ارزش‌های عددی که آنان برای کلمات قائل می‌شدند کاملا متغیر بود و این نشان می‌داد که بهتر است هنگامی که می‌خواهند مفهوم احتمال را به دیگران انتقال دهند، از مقادیر عددی استفاده کنند.

همان‌طور که بازی‌های مبتنی بر شانس لااقل سه هزار سال قدمت دارند مفهوم احتمال نیز جدید نیست. با این همه، تا پیش از قرن ۱۷ میلادی، مفهوم احتمال به صورت مستقل یا به زبان ریاضی بیان نشده بود. در اوایل قرن ۱۸، دو مواور که از طریق محاسبه شانس برد برای قماربازانی که در کافه‌ها قمار می‌کردند گذران زندگی می‌کرد، فرصت یافت تا برخی از راه‌حل‌های نظری خود را با استفاده از نتایج بازی‌های تاس و ورق که در دور و برش انجام می‌شد بازبینی نماید.

در بازی‌های شانسی، با ملاحظه مساله و برقرار دانستن مفروضات خاصی می‌توان برآوردی نظری یا پیشینی از احتمال به دست آورد. به عنوان مثال، در شیر یا خط کردن با سکه، فرض بر این است که سکه تقلبی نیست و احتمال پیشامد شیر و خط هر دو مساوی است چون در این مورد خاص تنها دو پیشامد متصور است احتمال شیر آمدن مساوی ۰/۵ است. برای اینکه درستی این حکم را در مورد یک سکه خاص بررسی کنیم، باید بارها و بارها با آن سکه شیر یا خط کنیم و تعداد شیرها را بشماریم. نسبت دفعات آمدن شیر، برآوردی از احتمال شیر به دست می‌دهد، به این ترتیب که:

$$\Pr(\text{شیر}) = \frac{\text{تعداد دفعات آمدن شیر}}{\text{تعداد کل پرتاب سکه}}$$

اگر تعداد دفعات پرتاب سکه کم باشد، این برآورد بسیار متغیر و بی‌ثبات است، اما هر چه تعداد دفعات شیر یا خط کردن افزایش یابد این برآورد بیشتر به سمت ۰/۵ میل می‌کند، البته اگر سکه بی‌اشکال باشد. در مورد سکه دو پیشامد ممکن وجود دارد که این دو پی آمد جامعند، چون مجموع احتمال این دو مساوی ۱/۰ است و نیز ناسازگارند، چون در یک بار شیر یا خط کردن وقوع هر دو پیشامد با هم ممکن نیست.

به عنوان دومین مثال، پیشامدهای ممکن آزمایش با ۵۲ ورق بازی را در نظر بگیرید. اگر یک ورق از بین یک دسته ورق بیرون بکشیم، ۵۲ پیشامد ممکن متصور است. احتمال بیرون آمدن ده خشت $\frac{۱}{۵۲}$ است. احتمال آمدن یک ورق با خال خشت $\frac{۱۳}{۵۲}$ است، چون ۱۳ ورق با خال خشت وجود دارد و احتمال همه آنها نیز یکی است. آمدن خال خشت رویدادی است که از ۱۳ پیشامد تشکیل شده است. سه رویداد دیگر عبارتند از: آمدن خال دل، خال پیک و خال گشنیز. این چهار رویداد با هم ناسازگارند چون هر ورق تنها می‌تواند از یک خال باشد و نیز جامعند چون مجموع احتمال این چهار رویداد مساوی ۱/۰ است. بعضی از رویدادها ناسازگار نیستند، مثلا رویداد «آمدن ورق ده» و «آمدن خال خشت»، چون یک ورق می‌تواند هم این باشد و هم آن. احتمال این قبیل حالات را در بخش بعدی یعنی بخش ترکیب احتمال‌ها بررسی خواهیم کرد. در کل، رویدادها نتیجه تجارب تصادفی است که در موقعیت‌های مختلف با آن مواجه هستیم، از قبیل:

- آزمایش ریختن تاس، که یکی از رویدادهای ممکن «آمدن عدد فرد» است.
- آزمایش با گزینش ۵۰۰ رأی‌دهنده که در یک نظرسنجی نمونه‌گیری شده‌اند؛ یکی از رویدادهای ممکن «دست کم ۳۰۰ نفر موافق حزب محافظه‌کار» است.
- آزمایش با ۵۰ دانش‌آموز که سر جلسه امتحان نشسته‌اند؛ رویدادهای ممکن این است که «متوسط نمره افراد بالاتر از ۷۵٪ باشد».
- آزمایش با ۲۰ بیمار که با داروی جدیدی درمان می‌شوند؛ یکی از رویدادهای ممکن این است که «دست کم ده بیمار کاملا معالجه شوند».
- دو گروه نمونه مساوی از بیماران سرطانی، یک گروه از طریق عمل جراحی و گروه دیگر از طریق شیمی‌درمانی، تحت درمان قرار گرفته‌اند؛ یکی از رویدادهای ممکن این است که «تعداد بیماران بهبود یافته در گروه شیمی‌درمانی بیشتر باشد».

چون احتمال‌های نظری یا پیشینی در بسیاری از موقعیت‌های این چنینی معلوم نیست، این احتمال‌ها را باید از داده‌ها و با مشاهده پیشامدهای آزمایش‌ها و محاسبه نسبت دفعات وقوع رویدادهای مورد نظر برآورد کرد.

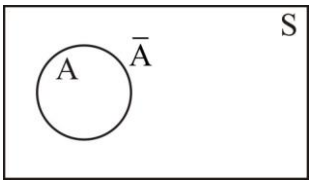
ترکیب احتمال‌ها

کسانی که به حرفه‌های بالینی می‌پردازند معمولا به بیش از یک رویداد و به ترکیب احتمال‌های آن رویدادها توجه دارند؛ مثلا، احتمال اینکه زنی که غده‌ای در سینه دارد مبتلا به سرطان باشد با این شرط که سنش از ۴۰ بیشتر باشد و خواهری مبتلا به سرطان داشته باشد.

یکی از راه‌های درک مفهوم احتمال، استفاده از نمودار ون (Venn diagram) است. طبق تعریف فضای نمونه‌ای S مجموعه تمامی پیشامدهای ممکن یک آزمایش است و A مجموعه‌ای از این پیشامدهاست که رویداد موردنظر را تشکیل می‌دهد. در نمودار ون، فضای نمونه (سطح داخل مستطیل) و مجموعه‌ای از پیشامدها که رویداد A را تشکیل می‌دهند (سطح داخل دایره) و رویداد «نه A» یا $\bar{A}$ (سطح بیرون از دایره) که متمم A نامیده می‌شود نشان داده شده است. چون فضای نمونه S مجموعه همه پیشامدهای ممکن است و یکی از این پیشامدها حتما رخ می‌دهد، $Pr(S)=۱$ است. بر همین منوال چون A و $\bar{A}$

مجموعا فضای نمونه را تشکیل می‌دهد $\Pr(A)+\Pr(\bar{A})=1$ است و در نتیجه $\Pr(A)=1-\Pr(\bar{A})$. به این ترتیب رویدادهای A و $\bar{A}$ هم ناسازگار و هم‌جامعند.

نمودار ون رویداد A و متمم آن



چندین رویداد مرکب را به راحتی می‌توان با نمودار ون نشان داد. اولین آنها رویداد «A یا B» است که به آن اجتماع (Union) رویدادهای A و B می‌گویند و در نظریه مجموعه‌ها آن را با نماد $A\cup B$ نشان می‌دهند. در این رویداد دست کم یکی از رویدادهای A یا B رخ می‌دهد. رویداد مرکب دوم، رویداد «A و B» است که به آن اشتراک (Intersection) رویدادهای A و B می‌گویند و آن را با نماد $A\cap B$ نشان می‌دهند و به معنای آن است که رویدادهای A و B هر دو با هم رخ دهند. نمودارهای زیر، $A\cap B$ را در دو حالت نشان داده است؛ یکی حالتی که اشتراک $A\cap B$ تهی است و دیگری حالتی که اشتراک $A\cap B$ تهی نیست.

رویداد مرکب $A\cap B$

(۱) اشتراک $A\cap B$ تهی نیست (۲) اشتراک $A\cap B$ تهی است؛ A و B ناسازگارند

در حالت دوم هیچ همپوشانی‌ای بین دو رویداد A و B وجود ندارد. یعنی اینکه این دو رویداد نمی‌توانند همزمان رخ دهند. بر طبق قاعده جمع احتمال‌های مرکب:

$$\Pr(B \quad A)\neq \Pr(A\cup B)=\Pr(A)+\Pr(B)-\Pr(A\cap B)$$

چون در جمع احتمال رویداد A و B، فصل مشترک آنها دو بار محاسبه می‌آید، احتمال اشتراک A و B را باید از جمع احتمال آن دو کم کرد تا $\Pr(A\cup B)$ به دست آید. اگر رویدادهای A و B ناسازگار باشند جمع احتمال دو رویداد به شکل ساده‌تر زیر درمی‌آید.

$$\Pr(A\cup B)=\Pr(A)+\Pr(B)$$

مفهوم دیگری را که باید توضیح دهیم احتمال شرطی Conditiona Probability است. گفتیم که همپوشی رویدادهای A و B، اشتراک آن دو رویداد است و آن را با $A\cap B$ نشان می‌دهند. احتمال وقوع B به عنوان رویداد دوم بسته به این است که رویداد اول یعنی A رخ داده باشد یا نه. این احتمال یعنی $\Pr(A$ به شرط $B)$ یا $\Pr(A$ به فرض $B)$ که به شکل $\Pr(A|B)$ نوشته می‌شود، نوعی احتمال شرطی است و با استفاده از نمودار (۱) در شکل قبل خواهیم داشت:

$$\Pr(B|A)=\frac{\Pr(A\cap B)}{\Pr(A)}$$

$$\Pr(A|B)=\frac{\Pr(A\cap B)}{\Pr(B)}$$

در نتیجه به قاعده ضرب (Multiplication Rule) احتمال‌ها می‌رسیم که عبارت است از:

$$\Pr(A\cap B)=\Pr(A\mid B)\times\Pr(B)=\Pr(B\mid A)\times\Pr(A)$$

برای فهم بهتر قاعده جمع و ضرب احتمال‌ها به مثال ۵۲ ورق بازی برمی‌گردیم. یک ورق از میان دسته ورق بیرون می‌کشیم و می‌خواهیم بدانیم احتمال اینکه ورق مزبور هم ده و هم خشت باشد چقدر است. اگر رویداد «بیرون آمدن ده» را با A و رویداد «بیرون آمدن خال خشت» را با B نشان دهیم، آنگاه $\Pr(A)=\frac{۴}{۵۲}$ (چون ۴ ورق از ۵۲ ورق ده است) و $\Pr(B)=\frac{۱۳}{۵۲}$ (چون ۱۳ ورق از خال خشت است)، پس $\Pr(A\cap B)=\frac{۱}{۵۲}$ و در نتیجه براساس قاعده جمع احتمال‌ها $\Pr(A\cup B)=\frac{۴}{۵۲}+\frac{۱۳}{۵۲}-\frac{۱}{۵۲}=\frac{۱۶}{۵۲}=۰/۳۱$.

حال فرض کنید دو ورق از میان دسته ورق بیرون کشیده‌ایم و هر دو را بدون اینکه نگاه کنیم در دست نگاه داشته‌ایم. مساله محاسبه احتمال آن است که هر دو ورق ده باشد. اگر A رویداد «ده بودن ورق اول» و B رویداد «ده بودن ورق دوم» باشد، آنگاه $\Pr(A)=\frac{۴}{۵۲}$ و $\Pr(B)=\frac{۳}{۵۱}$ خواهد بود چون پس از بیرون کشیدن ورق ده اول، تنها سه ورق ده در میان ۵۱ ورق باقی می‌ماند؛ بنابراین:

$$\Pr(A\cap B)=\Pr(B\mid A)\Pr(A)=\left(\frac{۳}{۵۱}\right)\times\left(\frac{۴}{۵۲}\right)=۰/۰۰۵$$

مثال: احتمال اینکه دختر جوانی برنامه تلویزیونی خاصی را نگاه کند ۰/۴، احتمال اینکه دخترعمویش آن برنامه را نگاه کند ۰/۵ و احتمال اینکه آن دختر جوان برنامه مزبور را نگاه کند با این فرض که دختر عمویش نیز نگاه می‌کند مساوی ۰/۷ است. احتمال این را بیابید که:

(الف) هم دختر جوان و هم دخترعمویش، هر دو برنامه را نگاه کنند؛

(ب) دختر عمو برنامه را نگاه کند با این شرط که دختر جوان نیز برنامه را نگاه کند؛

(ج) هیچ‌کدام برنامه را نگاه نکنند.

اگر A رویداد «نگاه کردن دختر جوان» و B رویداد «نگاه کردن دختر عمو» باشد، آنگاه $\Pr(A)=۰/۴$ و $\Pr(B)=۰/۵$ و $\Pr(A\mid B)=۰/۷$.

(الف) $\Pr(A\cap B)=\Pr(A\mid B)\Pr(B)=۰/۷\times۰/۵=۰/۳۵$

(ب) $\Pr(B\mid A)=\frac{\Pr(B\cap A)}{\Pr(A)}=\frac{۰/۳۵}{۰/۴}=۰/۸۷۵$

(ج) احتمال اینکه هم دختر جوان برنامه را نگاه کند و هم دخترعمویش عبارت است از:

$$\Pr(A\cup B)=\Pr(A)+\Pr(B)-\Pr(A\cap B)=۰/۴+۰/۵-۰/۳۵=۰/۵۵$$

پس احتمال اینکه هیچ‌کدام برنامه را تماشا نکنند $۱-\Pr(A\cup B)=۰/۴۵$ است.

یادآوری: احتمال‌های اولیه در این مثال باید پس از مشاهده رفتار تماشای برنامه در دختر جوان و دخترعمویش تعیین گردد. چنین ارقامی را نمی‌توان بدون دلیل موجهی از خود درآورد.

مثال: در جدول زیر تعداد کودکان اوریون گرفته و اوریون نگرفته و نیز تعداد کودکانی که واکسن اوریون زده‌اند و آنانی که واکسن نزده‌اند آمده است:

	اوریون گرفته	اوریون نگرفته	جمع
مایه‌کوبی شده	۱۴	۱۰۵	۱۱۹
مایه‌کوبی نشده	۶۰	۷۱	۱۳۱
جمع	۷۴	۱۷۶	۲۵۰

رویداد M آن است که «کودک به تصادف انتخاب شده اوریون گرفته باشد» و رویداد V «کودک به تصادف انتخاب شده مایه‌کوبی شده باشد». پس براساس داده‌های فوق، $\Pr(V)=\frac{۱۱۹}{۲۵۰}=۰/۴۷۶$ و $\Pr(V|M)=\frac{۱۴}{۷۴}=۰/۱۸۹$.

همچنین $\Pr(V\cap M)=\frac{۱۴}{۲۵۰}=۰/۰۵۶$.

راه دیگرش این است که چون $\Pr(M)=\frac{۷۴}{۲۵۰}$، در نتیجه:

$$\Pr(V\cap M)=\Pr(M)\Pr(V|M)=\left(\frac{۷۴}{۲۵۰}\right)\times\left(\frac{۱۴}{۷۴}\right)=۰/۰۵۶$$

همچنین $\Pr(V|M)=\frac{۱۴}{۱۱۹}=۰/۱۱۸$، احتمال مبتلا شدن کودک به اوریون است با این شرط که مایه‌کوبی شده باشد.

رویدادهای مستقل و وابسته

فرض کنید می‌خواهیم بدانیم چقدر احتمال دارد وزن دو کودک که پشت سر هم در یک بیمارستان متولد شده‌اند و دوقلو هم نیستند کمتر از ۲/۵ کیلوگرم باشد. این دو رویداد مستقلند چون رویداد دوم به هیچ وجه ارتباطی به رویداد اول ندارد.

رویداد B هنگامی مستقل از رویداد A دانسته می‌شود که احتمال وقوع B از وقوع یا عدم وقوع A تاثیری نپذیرد یا به عبارت دیگر، احتمال B مساوی با احتمال شرطی B به فرض A باشد؛ یعنی اینکه $\Pr(B)=\Pr(B|A)$. در نتیجه قاعده ضرب $\Pr(A\cap B)=\Pr(A)\Pr(B|A)$ به شکل ساده‌تر زیر درمی‌آید:

$$\Pr(A\cap B)=\Pr(A)\Pr(B)$$

این فرمول در حالتی صادق است که دو رویداد A و B مستقل از هم باشند. همچنین $\Pr(A)=\Pr(A|B)$ خواهد بود چون براساس قاعده دوم ضرب احتمال‌ها $\Pr(A\cap B)=\Pr(B)\Pr(A|B)$.

مثال: A و B دو رویدادند و $\Pr(A)=۰/۶۰$، $\Pr(B)=۰/۴۰$ و $\Pr(A\cap B)=۰/۱۰$ است. مقدار $\Pr(A\cup B)$ و $\Pr(A|B)$ را پیدا کنید و معلوم نمایید که دو رویداد A و B مستقلند یا نه.

در اینجا $\Pr(A\cup B)=\Pr(A)+\Pr(B)-\Pr(A\cap B)=۰/۶۰+۰/۴۰-۰/۱۰=۰/۹۰$

و $\Pr(A|B)=\frac{\Pr(A\cap B)}{\Pr(B)}=\frac{۰/۱۰}{۰/۴۰}=۰/۲۵$. چون $\Pr(A|B)=۰/۲۵\neq\Pr(A)$ پس رویدادهای A و B مستقل از هم نیستند.

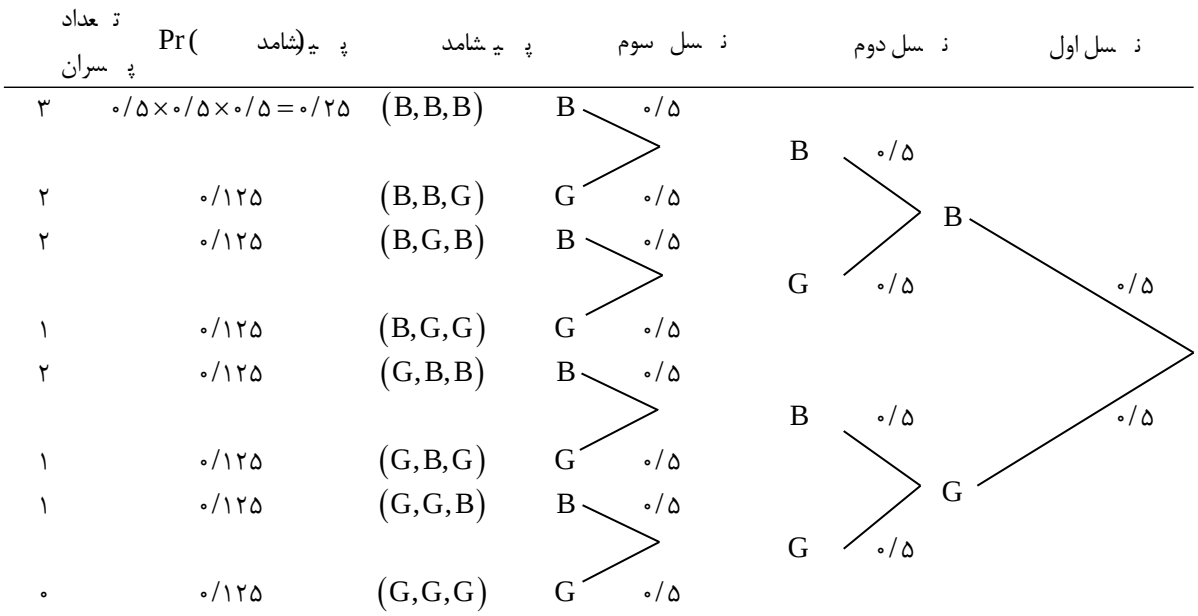
نمودار درختی برای محاسبه احتمال

نمودار درختی محاسبه احتمال رویدادهای مرکب را راحت‌تر می‌کند، به خصوص اگر آزمایش چند مرحله‌ای باشد. به عنوان مثال، می‌خواهیم رویدادهای تعداد فرزندان پسر را در سه نسل یک خانواده نشان دهیم و احتمال این رویدادها را نیز محاسبه کنیم. برای ساده‌تر کردن مساله فرض می‌کنیم که هیچ‌کدام از فرزندان دوقلو یا چند قلو نیستند و احتمال تولد پسر ۰/۵ است. (در واقع این احتمال اندکی کمتر از ۰/۵ است.)

در شکل زیر حالات ممکن گسترش خانواده را در سه نسل پی در پی نشان داده‌ایم. احتمال پسر بودن (B) یا دختر بودن (G) در هر تولد مساوی ۰/۵ است. چون تولد هر کودک مستقل از تولد قبلی است، بر طبق قاعده ضرب احتمال رویدادهای مستقل:

$$\Pr(\text{B و در پی آن B}) = \Pr(BB) = ۰/۵ \times ۰/۵ = ۰/۲۵$$

نمودار درختی احتمال



و

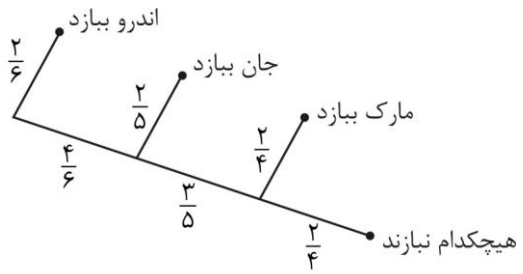
$$\Pr(\text{B و در پی آن G در آخر}) = \Pr(BBG) = ۰/۵ \times ۰/۵ \times ۰/۵ = ۰/۱۲۵$$

در نمودار هشت رویداد ممکن نشان داده شده است که این هشت رویداد هم جامعند و هم ناسازگارند. در نتیجه:

$$\Pr(\text{دو پسر در خانواده}) = \Pr(BBG) + \Pr(BGB) + \Pr(GBB) = ۰/۱۲۵ + ۰/۱۲۵ + ۰/۱۲۵ = ۰/۳۷۵$$

به همین ترتیب $\Pr$(یک پسر در خانواده) $= ۰/۳۷۵$ و $\Pr$(هیچ پسر در خانواده) $= ۰/۱۲۵$ خواهد بود. در مثال بعدی احتمال‌ها مشروط به وقوع رویدادهای وابسته است یعنی اینکه برای به دست آوردن احتمال رویداد نهایی باز هم باید احتمال شاخه‌ها را در هم ضرب کرد.

مثال: اندرو، جان و مارک دست به یک ماجراجویی زده‌اند. شش اتومبیل شبیه هم وجود دارد که دو تا از آنها ترمز ندارد. هر کدام از این سه نفر باید یک اتومبیل را به تصادف انتخاب کند و با سرعت زیاد به سمت پرتگاه براند و در زمان مناسب ترمز کند. احتمال‌های (یک نفر ببازد) Pr و (هیچ‌کدام نبازند) Pr را محاسبه کنید، با این فرض که با سقوط یکی از این سه نفر از دره بازی متوقف شود.



$$\Pr(\text{باختن اندرو}) = \Pr(\text{اندرو اتومبیل بدون ترمز انتخاب کند}) = \frac{۲}{۶}$$

$$\Pr(\text{باختن جان}) = \Pr(\text{اندرو اتومبیل سالمی بردارد و جان اتومبیل بدون ترمز}) = \left(\frac{۴}{۶}\right)\left(\frac{۲}{۵}\right) = \frac{۴}{۱۵}$$

$$\Pr(\text{باختن مارک}) = \Pr(\text{اندرو و جان اتومبیل سالمی انتخاب کنند و مارک اتومبیل بدون ترمز}) = \left(\frac{۴}{۶}\right)\left(\frac{۳}{۵}\right)\left(\frac{۲}{۴}\right) = \frac{۳}{۱۵}$$

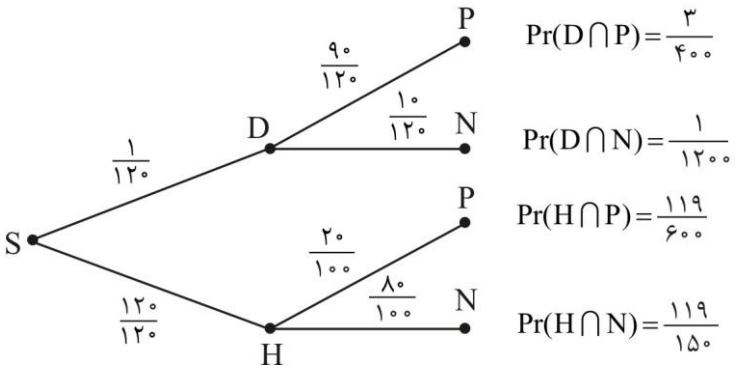
$$\Pr(\text{هیچ‌کدام نبازند}) = \left(\frac{۴}{۶}\right)\left(\frac{۳}{۵}\right)\left(\frac{۲}{۴}\right) = \frac{۳}{۱۵}$$

همان‌طور که می‌بینید جمع این چهار احتمال مساوی یک است. همچنین احتمال هر شاخه مشروط به وقوع پیش‌آمد قبل است.

مثال: بررسی بیمارانی که در ایالات متحده آمریکا دچار سرطان پروستات شده‌اند نشان می‌دهد که تا پایان سال ۱۹۹۶ از هر ۱۲۰ مرد ۵۰ ساله و بالاتر، ۱ نفر به این بیماری مبتلا شده است. با یک آزمایش ساده خون میزان آنتی‌ژن‌های خاص پروستات اندازه‌گیری می‌شود. در صورت وجود سرطان، مقدار PSA شدیدا افزایش می‌یابد، اما مقدار PSA به طور طبیعی با افزایش سن نیز افزایش می‌یابد.

در یک آزمایش تشخیصی، سطح خاصی برای این آنتی‌ژن تعیین شده که در ۹۰٪ بیماران مقدار PSA از این سطح فراتر می‌رود (مثبت بودن آزمایش) و در ۸۰٪ افراد سالم مقدار PSA از این سطح پایین‌تر است (منفی بودن آزمایش). تعدادی از مردان بالای ۵۰ سال به تصادف برای انجام این آزمایش تشخیصی انتخاب شده‌اند.

(الف) افراد آزمایش شده یا مبتلا به سرطان پروستات هستند (D) یا سالمند (H) و در هر کدام از این دو حالت یا جواب آزمایش مثبت (P) است و یا منفی (N). نمودار درختی پیشامدهای مختلف را رسم کنید. احتمال هر یک از شاخص‌های این نمودار درختی را بنویسید و احتمال هر یک از پیشامدهای ممکن را حساب کنید و در کنار خط هر پیشامد یادداشت نمایید.



(ب) احتمال اینکه جواب آزمون تشخیصی مثبت (P) باشد چقدر است؟

$$\Pr(\text{مثبت شدن آزمایش}) = \Pr(D \cap P) + \Pr(H \cap P) = \frac{۳}{۴۰۰} + \frac{۱۱۹}{۶۰۰} = ۰/۲۰۵۸$$

(ج) احتمال اینکه فردی که جواب آزمایشش مثبت بوده بیمار (H) باشد چقدر است؟

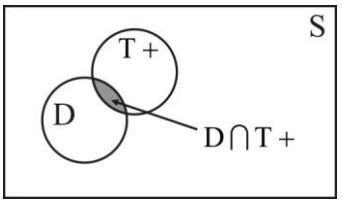
$$\Pr(H \mid P) = \frac{\Pr(H \cap P)}{\Pr(P)} = \frac{\frac{۱۱۹}{۶۰۰}}{۰/۲۰۵۸} = ۰/۹۶۳۶$$

آزمایش‌های تشخیصی

پزشکان از آزمون‌های تشخیصی برای تعیین بیماری اشخاص استفاده می‌کنند. پزشک غالبا اطلاعاتی در خصوص آزمون تشخیص و برآوردی از میزان شیوع بیماری در جامعه بیماران دارد. مساله این است که:

- احتمال بیمار بودن به شرط مثبت بودن آزمایش چقدر است، یا
- احتمال بیمار نبودن به شرط منفی بودن آزمایش چقدر است.

رویداد وضعیت بیماری و رویداد جواب آزمایش



این وضعیت را در شکل بالا با نمودار ون نشان داده‌ایم. D رویداد «وجود بیماری» و $\bar{D}$ متمم آن یعنی «فقدان بیماری»، T^+ رویداد «مثبت بودن آزمایش» و $\bar{T}$ متمم آن یعنی «منفی بودن یا بی‌نتیجه بودن آزمایش» است و بالاخره S فضای نمونه جمعیت موردنظر است. بنابراین شیوع بیماری عبارت است از:

$$\Pr(D) = \frac{\text{تعداد افراد مبتلا به بیماری در گروه تعریف شده}}{\text{تعداد افراد گروه تعریف شده}}$$

که در واقع احتمال آن است که فرد به بیماری مبتلا شود در هنگامی که هیچ اطلاعات دیگری از آن فرد در دسترس نباشد.

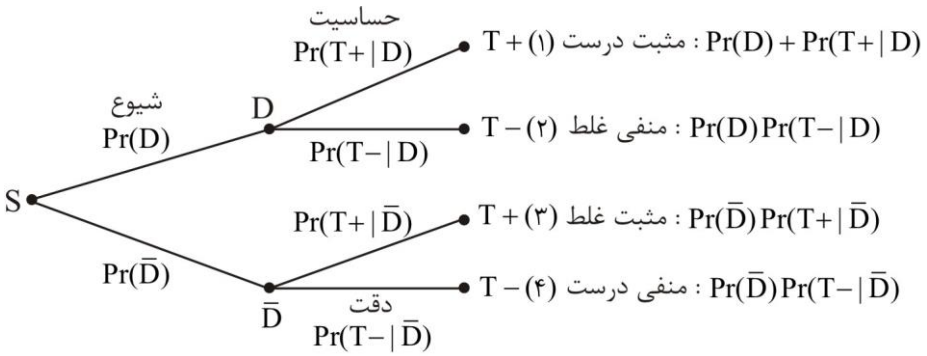
همچنین:

نسبت افراد بیماری که جواب آزمایششان مثبت بوده است = حساسیت (Sensitivity) آزمایش $= \Pr(T^+ \mid D)$

نسبت افراد سالمی که جواب آزمایششان منفی بوده است = دقت (Specificity) آزمایش $= \Pr\left(T^{-} \mid \bar{D}\right)$

این مقادیر هرگز از پیش معلوم نیستند و باید آنها را برآورد کرد. شیوع را از طریق مطالعات همه‌گیرشناسی (اپیدمیولوژیکی) و یا گاهی با بررسی فهرستی طولانی از بیماران برآورد می‌کنند. حساسیت و دقت را می‌توان با استفاده از گروه نمونه‌ای از افرادی که وضعیت بیماریشان معلوم و مسجل است به بهترین نحو برآورد کرد. اما برای اینکه وضعیت بیماری آنها بر ما معلوم شود بـه آزمایش امتحان شده و معتبری نیازمندیم و به ندرت نیز چنین آزمایشی وجود دارد. نبـود چنـین آزمایشـی بـه عـلاوه خطـای نمونه‌برداری، موجب ایجاد خطا در برآورد حساسیت و دقت می‌شود.

نمودار درختی مربوط به حساسیت و دقت و شیوع



مراحل چهارگانه اجرای آزمون آماری به ترتیب زیر است:

۱) فرضیه صفر $(H_{\circ})$ در مورد یکی از پارامترهای جامعه طرح می‌شود.

۲) فرضیه مقابل یا فرضیه پژوهش (H_A) پیشنهاد می‌شود. این فرضیه وقتی پذیرفته می‌شود که $H_{\circ}$ رد شود.

۳) آماره آزمون با استفاده از داده‌های نمونه محاسبه می‌شود. این آماره مقدار استاندارد شده میانگین یا نسبت یا تفـاوت نمونـه است و این همان نمره z یا نمره t است که به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\text{آماره آزمون} = \frac{\text{مقدار فرضیه صفر} - \text{آماره نمونه‌ای مشاهده شده}}{\text{(برآورد) خطای معیار آماره}}$$

۴) ناحیه رد (Rejection Region) تعیین می‌شود. این ناحیه شامل مجموعه‌ای از مقـادیر آمـاره آزمـون اسـت کـه بـا $H_{\circ}$ مغایرت دارد و متضمن رد آن است.

ناحیه رد معمولا ناحیه دوم یا دنباله توزیع z یا t است و احتمال اینکه یک مقدار در ناحیه رد قرار گیرد «سـطح معنـی‌داری» نامیده و با علامت α نشان داده می‌شود. مقدار α معمولا مساوی ۰/۰۵ یا ۰/۰۱ گرفته می‌شود.

مثال: فرض کنید ضربان قلب دختران جوان سالم در حالت استراحت توزیعی نرمال با میانگین ۶۶ ضربان در دقیقه داشته باشد و انحراف معیار آن نیز $\sigma = ۹/۲$ باشد. دارویی به ۱۰۰ زن جوان و سالم داده شده و ضـربان قلـب آنهـا پس از مصرف دارو اندازه‌گیری شده است. میانگین $\bar{x} = ۶۸$ ضربان در دقیقه برای این گروه نمونه به دسـت آمـده است. گمان بر این است که این دارو میزان ضربان قلب دختران را افزایش داده ولـی انحـراف معیـار آن تغییـری نکرده است. این فرضیه را آزمون کنید.

دو ادعا مطرح است:

(الف) این دارو اثری در ضربان قلب ندارد $(\mu = ۶۶)$.

(ب) این دارو میزان ضربان قلب را افزایش می‌دهد $(\mu > ۶۶)$.

مرحله (۱). ادعای (الف) به عنوان فرضیه صفر گرفته می‌شود:

$$H_{\circ} : \mu = ۶۶$$

مرحله (۲): ادعای (ب) به عنوان فرضیه پژوهش یا فرضیه مقابل گرفته می‌شود:

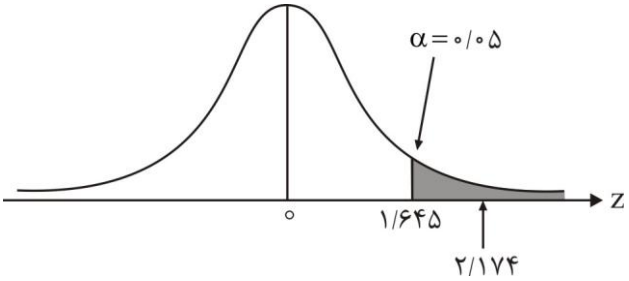
$$H_A : \mu > ۶۶$$

در روش آزمون فرضیه، $H_{\circ}$ فرضیه صحیح انگاشته می‌شود و براساس همین فرض، میانگین نمونه $\bar{x} = ۶۸$ استاندارد می‌شود تا معلوم گردد که آیا این مقدار در ناحیه رد با سطح معنی‌داری α قرار می‌گیرد یا نه.

مرحله (۳): $\bar{x} = ۶۸$ است و با استاندارد کردن آن، آماره آزمون به دست می‌آید:

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\alpha}{\sqrt{n}}} = \frac{\text{میانگین نمونه} - \text{میانگین فرضیه صفر}}{\text{خطای معیار میانگین}} = \frac{۶۸ - ۶۶}{\frac{۹/۲}{\sqrt{۱۰۰}}} = ۲/۱۷۴$$

مرحله (۴): مقدار α را مساوی ۰/۰۵ می‌گیریم. چون فرضیه مقابل $\mu > ۶۶$ است آزمون را یک سویه می‌گویند. ناحیه رد در شکل زیر نشان داده شده و مقدار $z = ۱/۶۴۵$ به این دلیل انتخاب شده که سطح زیرمنحنی در سمت راست $z = ۱/۶۴۵$ برابر ۰/۰۵ است.



این منحنی توزیع مقادیر z است که $z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ و در شرایط $H_{\circ}$، $\mu = ۶۶$ است. مقدار $z = ۲/۱۷۴$ در ناحیه رد $H_{\circ}$ قرار می‌گیرد. بنابراین آماره آزمون در سطح ۰/۰۵ معنی‌دار است. پس $H_{\circ}$ را به نفع H_A رد می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم که داروی موردنظر متوسط ضربان قلب را افزایش داده است.

اگر در این مثال، σ یعنی انحراف معیار جامعه معلوم نبود، می‌بایست مقدار آن را از روی مقدار s نمونه با $n-۱$ درجه آزادی برآورد کنیم. در اینجا دیگر مقدار معادل $z = ۱/۶۴۵$ در جدول t برابر ۱/۶۵۸ است.

نکاتی در مورد آزمون آماری

- سطح معناداری یا α، ناحیه رد را تعیین می‌کند. مثلا اگر در مثال پیشین $\alpha = ۰/۰۱$ باشد، ناحیه رد، مقادیر $z \geq ۲/۳۳$ خواهد بود. این ناحیه در شکل زیر نشان داده شده است. در این مورد، آماره به دست آمده معنی‌دار نیست و بنابراین نمی‌توان فرضیه صفر را به طور کامل مستدل در این سطح معنی‌داری رد کرد.