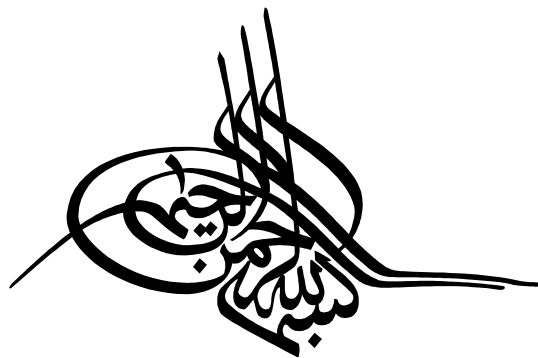




## تحقیق در عملیات

سری کتابهای کمک آموزشی کارشناسی ارشد

مجموعه مدیریت

مؤلف: مسعود معدنچی‌ها

ویراستار علمی: سید علی موسوی‌نژاد مقدم

|                     |                                                                                           |
|---------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|
| سرشناسه             | : معدنچی‌ها، مسعود                                                                        |
| عنوان               | : تحقیق در عملیات                                                                         |
| مشخصات نشر          | : تهران: مشاوران صعود ماهان، ۱۴۰۴                                                         |
| مشخصات ظاهری        | : ۵۹۳ ص                                                                                   |
| فروست               | : سری کتاب‌های کمک آموزشی کارشناسی ارشد                                                   |
| شابک                | : ۹۷۸-۶۰۰-۴۵۸-۵۷۶-۷                                                                       |
| وضعیت فهرست نویسی   | : فنیای مختصر                                                                             |
| یادداشت             | : این مدرک در آدرس <a href="http://opac.njai.ir">http://opac.njai.ir</a> قابل دسترسی است. |
| رده‌بندی دیویی      | : ۳۷۸/۶۶۴                                                                                 |
| شماره کتابشناسی ملی | : ۳۹۳۵۴۷۲                                                                                 |



ناشر:.....مشاوران صعود ماهان

مدیر مسئول:.....هادی و مجید سیاری

مؤلف:.....مسعود معدنچی‌ها

ویراستار علمی:.....سید علی موسوی‌نژاد مقدم

مسئول تولید محتوا:.....سمیه بیگی

نوبت و تاریخ چاپ:.....سوم / ۱۴۰۴

شمارگان:.....۱۰۰۰ جلد

قیمت:.....۶/۹۹۰/۰۰۰ ریال

شابک:.....ISBN: ۹۷۸-۶۰۰-۴۵۸-۵۷۶-۷

انتشارات مشاوران صعود ماهان: خیابان ولیعصر، بالاتر از تقاطع مطهری،

روبروی قنادی هتل بزرگ تهران، جنب بانک ملی، پلاک ۲۰۵۰

تلفن: ۸۸۱۰۰۱۱۳-۴

# سخن ناشر

«ن والقلم و ما یسطرون»

کلمه نزد خدا بود و خدا آن را با قلم بر ما نازل کرد.

به پاس تشکر از چنین موهبت الهی، موسسه ماهان درصدد برآمده است تا در راستای انتقال دانش و مفاهیم با کمک اساتید مجرب و مجموعه کتب آموزشی خود برای شما داوطلبان ادامه تحصیل در مقطع کارشناسی ارشد گام موثری بردارد. امید است تلاش‌های خدمتگزاران شما در این موسسه پایه‌گذار گام‌های بلند فردای شما باشد.

مجموعه کتاب‌های کمک آموزشی ماهان به‌منظور استفاده داوطلبان کنکور کارشناسی ارشد سراسری و آزاد تالیف شده‌اند. در این کتاب‌ها سعی کرده‌ایم با بهره‌گیری از تجربه اساتید بزرگ و کتب معتبر، داوطلبان را از مطالعه کتاب‌های متعدد در هر درس بی‌نیاز کنیم.

دانشجویان عزیز و اساتید محترم می‌توانند هرگونه انتقاد و پیشنهاد درخصوص تالیفات ماهان را از طریق سایت ماهان به آدرس [mahan.ac.ir](http://mahan.ac.ir) با ما در میان بگذارند.

موسسه آموزش عالی آزاد ماهان

# سخن مؤلف

دامنه بحث تحقیق در عملیات آنچنان گسترده شده که هرچه زمان بیشتر پیش می‌رود، نکات و مفاهیم جدیدی بر آن افزوده می‌شود. سری کتاب‌های مرجع آمادگی کنکور کارشناسی ارشد موسسه آموزش عالی آزاد ماهان که در اختیار شما عزیزان قرار می‌گیرد حاصل تلاش گروهی از اساتید برجسته و فارغ‌التحصیلان برتر دانشگاه‌های معتبر کشور می‌باشد که تمامی نکات و مفاهیم را در این کتاب جمع‌آوری کرده‌اند.

درس پژوهش عملیاتی در کنکور کارشناسی ارشد مدیریت به عنوان یکی از دروس استراتژیک و رتبه‌ساز به حساب می‌آید و با توجه به اینکه درصد میانگین کشوری این درس بسیار پایین می‌باشد دانشجویانی که بتوانند روی این درس سرمایه‌گذاری کنند و درصد قابل توجهی از این درس را در کنکور کسب کنند نیمی از راه قبولی در کنکور ارشد را گذرانده‌اند.

درس تحقیق در عملیات با توجه به اینکه حالت مفهومی - تحلیلی - محاسباتی دارد، باید به صورتی آموزش داده شود که دانشجو به موضوع اصلی درس پی برده و از حالت مبهمی که هنگام مطالعه برایش ایجاد می‌گردد خارج شود. در این کتاب سعی بر آن شده است که تمامی مطالب و نکات اصلی کنکور به صورت خودآموز و نحوه نگارش آن به صورت ساده روان بیان گردد که تمامی دانشجویان (مدیریتی و غیرمدیریتی) هیچ مشکلی در مطالعه نداشته باشند.

در میان تمام فعالیت‌ها ارائه موثرترین خدمت بی‌ریا همراه با عشق‌ورزی بی‌توقع و پرهیزکاری کامل به نیازمندترین افراد مهم‌ترین کار است. افتخار چنین خدمتی می‌تواند نصیب هر فردی بشود.

در پایان لازم می‌دانم از زحمات مدیریت محترم تولید سرکار خانم بیگی و همچنین سرکار خانم حسینی کمال تشکر و قدرانی را داشته باشم.

موفق باشید

مسعود معدنچی‌ها

**من به دانشگاه نیک زندگی**

**بنده هستم لیک در تابندگی**

**هم معلم هم یکی دانش پژوه**

**هم یکی هستم همی باشم گروه**

در جاده زندگی همواره پایین و بالا وجود داشته و دارد. این مجموعه تقدیم به کسانی که یادم داده‌اند، هیچ مشکلی بزرگ و هیچ دیواری بلند نیست ...

**تقدیم به پدر و مادر عزیزم**



## فهرست

صفحه

عنوان

|                                                                         |     |
|-------------------------------------------------------------------------|-----|
| فصل اول: مدل برنامه‌ریزی خطی (LP) .....                                 | ۹   |
| فصل دوم: مدل برنامه‌ریزی خطی - روش ترسیمی .....                         | ۳۸  |
| فصل سوم: مدل برنامه‌ریزی خطی - روش سیمپلکس .....                        | ۷۷  |
| فصل چهارم: مدل برنامه‌ریزی خطی - روش مسئله و سیمپلکس ثانویه .....       | ۱۴۳ |
| فصل پنجم: شکل ماتریسی مدل برنامه‌ریزی خطی .....                         | ۱۹۳ |
| فصل ششم: تحلیل حساسیت مدل برنامه‌ریزی خطی و برنامه‌ریزی پارامتریک ..... | ۲۲۹ |
| فصل هفتم: مدل حمل و نقل .....                                           | ۳۱۵ |
| فصل هشتم: مدل تخصیص .....                                               | ۳۶۹ |
| فصل نهم: شبکه‌ها .....                                                  | ۳۹۱ |
| فصل دهم: مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح و صفر و یک .....                      | ۴۱۵ |
| فصل یازدهم: مدل برنامه‌ریزی غیرخطی .....                                | ۴۶۱ |
| فصل دوازدهم: برنامه‌ریزی پویا .....                                     | ۴۸۱ |
| فصل سیزدهم: نظریه بازی‌ها .....                                         | ۵۰۱ |
| سوالات کنکور سراسری ۹۵ الی ۱۴۰۳ .....                                   | ۵۳۲ |
| منابع .....                                                             | ۵۹۳ |



# فصل اول

مدل برنامه ریزی خطی (LP)

---

## فصل اول

# مدل برنامه ریزی خطی (LP)

مدل، نمایشی خاص از یک واقعیت است و مدل‌های ریاضی به معنای انتخاب مناسب‌ترین ترکیب استفاده از منابع محدود در رسیدن به اهداف تصمیم‌گیری می‌باشند.

برنامه‌ریزی خطی، مدلی ریاضی برای جست‌وجو و انتخاب بهترین برنامه (روش انجام کار) از میان مجموعه راه‌های ممکن است. از آنجا که تمامی روابط ریاضی موجود در این مدل از نوع درجه یک است، مدل خطی نامیده می‌شود. هر مدل برنامه‌ریزی خطی از سه بخش تشکیل شده است:

**بخش اول:** تابع هدف می‌باشد و به طور مستقیم به محصولات مرتبط می‌باشد و نقشی که هر کدام از این محصولات می‌توانند برای رسیدن به تابع هدف ایفا نمایند.

**بخش دوم:** به نوعی مقدار تولید هر محصول را از این بخش مشخص می‌کنیم، اختصاص به منابع تولیدی کارخانه دارد و چون هر منبع تولیدی دارای یک حد مجاز می‌باشد، برای هر منبع یک محدودیت در نظر گرفته و علاوه بر مشخص نمودن میزان آن محدودیت، میزان مصرف هر کدام از محصولات هم از این منابع تولیدی در سمت چپ محدودیت نوشته می‌شود و چون محدودیت‌ها معمولاً به صورت نامعادله هستند، نمی‌توان از منطق ریاضی برای حل آنها استفاده کرد.

**بخش سوم:** متغیرهای تصمیم و پارامترهای مدل می‌باشد که متغیرهای تصمیم، متغیرهای مجهولی هستند که باید مقدار آنها پس از حل مدل به دست آیند. معمولاً این متغیرها را در مدل با نماد  $x_1, x_2, \dots, x_n$  نمایش می‌دهند. پارامترهای مدل، متغیرهای معلوم و ثابت می‌باشند.

به طور مثال میزان مصرف مواد خام و یا نیروی انسانی که برای تولید یک واحد محصول مورد استفاده قرار می‌گیرند به عنوان پارامترهای مدل شناخته می‌شوند.

نکته ۱ پارامترهای مدل می‌توانند قطعی یا غیرقطعی باشند.



نکته ۲ یک مدل ریاضی زمانی دارای بهترین جواب است که مقادیر متغیرهای تصمیم در تمامی محدودیت‌های مدل صدق نموده و همچنین بهترین مقدار برای تابع هدف به دست آورند.



## فرم کلی یک مدل برنامه ریزی خطی

مدل برنامه ریزی خطی به عنوان یکی از مدل های ریاضی بیشترین کاربرد را در تصمیم های خرد و کلان اقتصادی و تولیدی دارد که در ادامه به بحث و بررسی آن می پردازیم:

$$\begin{aligned} \text{هدف} \quad & \text{Max(Min)} z : c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \\ & \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n (\leq \text{یا} \geq) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n (\leq \text{یا} \geq) b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n (\leq \text{یا} \geq) b_m \end{cases} \\ & x_1, \dots, x_n \geq 0 \text{ یا آزاد در علامت} \end{aligned}$$

فرم کلی مدل برنامه ریزی خطی به صورت زیر می باشد:

$$\text{Max(Min)} z = \sum_{i=1}^n C_i |x_i|$$

$$\text{s.t.} : \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, i = 1, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \text{ یا } j = 1, \dots, n$$

در این مدل  $x_j$  ها متغیرهای تصمیم مدل،  $C_j$  و  $b_i$  هم مقادیری ثابت بوده و پارامترهای مدل هستند.

$C_j$ : ضرایب هزینه یا سودآوری

$b_i$ : اعداد سمت راست (میزان در دسترس از محدودیت ها)

$a_{ij}$ : ضرایب فنی یا تکنولوژی

## نمایش ماتریسی مدل برنامه ریزی خطی

$$\text{Max(Min)} z = cx$$

$$Ax (\leq \text{یا} \geq) b$$

$$x \geq 0 \text{ یا } x \leq 0 \text{ یا آزاد در علامت}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m \times 1}, \quad c = [c_1, c_2, \dots, c_n]_{1 \times n}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

نکته ۳ محدودیت مسئله به تابع هدف ربطی ندارد، نوشتن تابع هدف به نوشتن محدودیت ربطی ندارد، چون محدودیت های یک مسئله به طور مستقیم از منابع تولیدی ناشی می شود که این منابع با تغییر هدف تغییر نمی کند.

نکته ۴ تعداد ضریب ندارد. اگر تابع یا محدودیتی مربوط به تعداد محصولات باشد، متغیرهای  $x$  هیچ ضریبی نگرفته و یا اصطلاحاً ضریب آنها ۱ خواهد بود. چون به طور مستقیم هدف ما خود  $x_A$  یا  $x_B$  است.

**سوال ۱-** اگر هزینه تولید محصولات ۱ و ۲ به ترتیب ۶ و ۵ تومان باشد و از طرفی نیروی انسانی مورد نیاز برای تولید این دو محصول ۲ و ۳ نفر- ساعت باشد، به منظور حداکثر کردن مقدار تولید محصول، کدام گزینه بیانگر تابع هدف این مسئله می باشد؟

$$\text{Max} z = 2x_1 + 3x_2 \quad (۲)$$

$$\text{Min} z = x_1 + x_2 \quad (۴)$$

$$\text{Max} z = x_1 + x_2 \quad (۱)$$

$$\text{Max} z = 6x_1 + 5x_2 \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۱)

ضرایب

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{قیمت فروش} \rightarrow \text{درآمد} \\ \text{سود} \rightarrow \text{سود} \\ \text{هزینه} \rightarrow \text{هزینه} \\ \text{تعداد} \rightarrow 1 \end{array} \right. \quad 1 = \text{ضرایب متغیرها} \xrightarrow{\text{هواره}} \text{مقدار (تعداد) محصول}$$

$$\text{Max} z = x_1 + x_2$$

یک مدل برنامه‌ریزی خطی دارای مفروضات خاصی است که باید تمامی آنها برقرار باشند:

- ۱) **فرض تناسب:** این فرض بیانگر این است که متغیرهای تصمیم مسئله مستقل از یکدیگر بوده و روند تغییر تابع هدف متناسب با روند تغییرات متغیرهای تصمیم است و همچنین منابع هر محدودیت نیز متناسب با مقداری که متغیر به خود اختصاص می‌دهد، مصرف می‌گردد.
- ۲) **فرض جمع‌پذیری:** این فرض بیانگر این است که در تابع هدف و محدودیت‌های مسئله رابطه ریاضی که بین متغیرها وجود دارد به صورت جمع و تفریق بوده و فرض رابطه متقابل (ضرب یا تقسیم) بین متغیرهای تصمیم وجود ندارد.
- ۳) **فرض بخش‌پذیری:** این فرض بیانگر این است که متغیرهای تصمیم می‌توانند مقادیر پیوسته‌ای به خود اختصاص دهند. (عدد صحیح یا غیر صحیح)
- ۴) **فرض معین بودن:** این فرض بیانگر این است که پارامترهای مدل  $(a_{ij}, b_i, c_j)$  اعدادی ثابت و مشخص بوده و نمی‌توانند حالت‌های احتمالی یا تصادفی داشته باشند.

مثال ۱- یکی از محدودیت‌های موجود در یک مدل برنامه‌ریزی به صورت  $2x_1 + x_1x_2 + x_2 + x_2^2 = 20$  است. با توجه به محدودیت فوق کدام یک از مفروضات مدل برنامه‌ریزی خطی نقض گردیده است؟  
پاسخ:

۲ فرض از مفروضات برنامه‌ریزی خطی نقض گردیده است.

۱- فرض تناسب: به علت آنکه در این محدودیت  $x_2^2$  وجود دارد.

۲- فرض جمع‌پذیری: به علت آنکه در این محدودیت  $x_1x_2$  وجود دارد.

نکته ۵ با ضرب منفی در یک محدودیت، جهت محدودیت عوض می‌شود.

$$2x_1 + 4x_2 \leq 8 \xrightarrow{\times(-)} -2x_1 - 4x_2 \geq -8$$

نکته ۶ با ضرب منفی در تابع هدف، جنس تابع هدف عوض می‌شود.

$$\max z = x_1 + x_2 \xrightarrow{\times(-)} \min z = -x_1 - x_2$$

نکته ۷ محدودیت‌هایی را که به صورت مساوی (=) است را می‌توان به دو محدودیت با علامت ( $\leq$  و  $\geq$ ) تبدیل کرد.

$$2x_1 + 3x_2 = 6 \rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \end{cases}$$



مثال ۲- یک هواپیما در دو قسمت جلو و عقب خود بار مسافران را حمل می کند. اگر مجموع بار عقب و جلوی هواپیما حداکثر ۳۰ کیلوگرم باشد و بار جلو،  $\frac{2}{3}$  بار عقب باشد (حجم باری)، محدودیت های این مدل را بنویسید.

پاسخ:

$$x_A + x_B \leq 30$$

$x_A$  میزان بار جلو

$$x_A = \frac{2}{3} x_B$$

$x_B$  میزان بار عقب



نکته ۸ هرگاه بحث اختلاف متغیرهای مسئله مطرح شود، باید از علامت قدر مطلق استفاده کرد، چون مشخص نیست کدام متغیر بیشتر است.



نکته ۹ برای نوشتن محدودیت های تولید زمانی که روابط میان متغیرها به صورت نسبت زمان و یا نسبت منابع تولیدی باشند، ابتدا باید با معکوس نمودن ضرایب نسبت ها آنها را به نسبت تولید تبدیل کنیم، سپس میزان تولید یکی از محصولات را که داده شده است در نسبت های تولید قرار داده و میزان تولید سایر محصولات را مشخص کنیم. در نهایت تنها سؤالی که باید جواب آن را از روی گزینه ها تشخیص داد، تنها همین سؤال بوده و مقادیر را به صورتی که مثلاً  $x_B$  را در گزینه ها صفر در نظر گرفته و می بینیم کدام گزینه  $x_A$  را معادل با مقدار موردنظر ما داده است گزینه درست را انتخاب می کنیم.

سوال ۲- یک شرکت سه محصول A، B و C را تولید می کند، اگر هر واحد محصول A برای تولید خود ۳ برابر محصول B زمان خرج کند و از طرفی هر واحد محصول B هم نصف محصول C زمان صرف تولید خود کند، در شرایطی که کل زمان کارخانه را به محصول B اختصاص دهیم، از این محصول تنها می توان ۶۰۰ واحد تولید کرد، با این شرایط کدام یک از محدودیت های زیر، محدودیت درستی از محصولات را نشان می دهد؟

$$3x_A + x_B + 2x_C \leq 600 \quad (2)$$

$$2x_A + x_B + 3x_C \leq 600 \quad (1)$$

$$3x_A + 2x_B + 4x_C \leq 1200 \quad (4)$$

$$x_A + 2x_B + x_C \leq 600 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

در صورت سؤال، رابطه بین زمان ها است، اما در آخر سؤال رابطه تولید موردنظر است. پس اول زمان را به تولید تبدیل کرده و محدودیت درست را به دست می آوریم.

$$\left. \begin{array}{l} x_A = 3x_B \\ x_B = \frac{1}{2}x_C \end{array} \right\} \xrightarrow[\text{تولید}]{\text{تبدیل به نسبت زمان}} \begin{array}{l} x_A = \frac{1}{3}x_B \\ x_B = 2x_C \\ x_B = 600 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_A = 200 \\ x_C = 300 \end{array}$$

$$x_B = 600 \Rightarrow \text{تولید}$$

در این مسائل ایجاد محدودیت فقط از روی گزینه ها امکان پذیر است.

سوال ۳- اگر یک کارخانه سه محصول A، B و C را تولید کند و محصول A،  $\frac{1}{4}$  محصول B از مواد اولیه استفاده کند و ۳ برابر محصول C از این مواد برای تولید هر واحد خود استفاده کند با شرط آنکه تمام مواد اولیه را به تولید C اختصاص دهیم و از این محصول ۴۰۰ واحد تولید کنیم، محدودیت درست کدام است؟

$$x_A + \frac{1}{4}x_B + 3x_C \leq 1200 \quad (2)$$

$$3x_A + 6x_B + 2x_C \leq 800 \quad (1)$$

$$3x_A + 6x_B + 2x_C \leq 800 \quad (4)$$

$$3x_A + 6x_B + x_C \leq 400 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۳)

منابع تولیدی  $\xrightarrow{\text{بدیل}}$  نسبت مصرف مواد اولیه

$$x_A = \frac{1}{2}x_B \Rightarrow x_A = 2x_B \Rightarrow x_A = \frac{400}{3}, x_B = \frac{200}{3}$$

$$x_A = 3x_C \Rightarrow x_A = \frac{1}{3}x_C$$

$$x_C = 400$$

$$\Rightarrow 3x_A + 6x_B + x_C \leq 400 \text{ با توجه به گزینه ها}$$

نکته ۱۰ هرگاه بحث اختلاف متغیرهای مسئله مطرح شود، باید از علامت قدر مطلق استفاده کرد، چون مشخص نیست کدام متغیر بیشتر است.

نکته ۱۱ هرگاه در صورت مسئله از کلمه می‌توانند استفاده شود آن محدودیت به صورت کوچک‌تر مساوی ( $\leq$ ) نوشته می‌شود.

**سوال ۴-** نفر باید در چادرهای ۸ نفره و ۴ نفره اسکان یابند. تعداد کل چادرهایی که این افراد می‌توانند با خود حمل کنند، حداکثر ۱۴ چادر است. اگر  $x_A$  و  $x_B$  به ترتیب چادرهای نوع ۸ نفره و ۴ نفره باشند، محدودیت‌های این مسئله کدامند؟

$$\begin{aligned} 8x_A + 4x_B &= 64, & x_A + x_B &\leq 14 & (2) & & 4x_A + 8x_B &= 64, & x_A + x_B &\geq 14 & (1) \\ x_A + x_B &= 64, & 4x_A + 8x_B &\leq 14 & (2) & & 4x_A + 8x_B &\geq 64, & x_A + x_B &\leq 14 & (3) \end{aligned}$$

پاسخ: گزینه ۲)

محدودیت اول بیانگر تعداد کل چادرهای موجود می‌باشد که تعداد آنها حداکثر ۱۴ چادر است، پس:

$$x_A + x_B \leq 14$$

محدودیت دوم بیانگر نحوه اسکان کامل ۶۴ نفر در چادرهای ۸ نفره و ۴ نفره است، پس:

$$8x_A + 4x_B = 64$$

$$x_A, x_B \geq 0$$

تابع مونتاژ

تابعی است که یک محصول از مونتاژ چند قطعه تشکیل می‌شود، برای نوشتن آن همواره از حالت زیر استفاده می‌شود:

$$\text{تابع محصول مونتاژی} = \min \left\{ \frac{x_A}{A \text{ ل } \text{تعداد محصول مونتاژی}}, \frac{x_B}{B \text{ ل } \text{تعداد محصول مونتاژی}}, \dots \right\}$$

**سوال ۵-** یک محصول از مونتاژ ۳ قطعه A، B، C به ترتیب ۲ و  $\frac{1}{3}$  و ۳ ساخته می‌شود، اگر هدف تولید حداقل از این محصول مونتاژی باشد، تابع هدف کدام است؟

پاسخ:

$$\text{تابع} : \min (\text{تعداد}) = \min \left\{ \frac{x_A}{2}, 3x_B, \frac{x_C}{3} \right\} \rightarrow \min (\text{تعداد}) = \min \left\{ \frac{x_A}{2}, \frac{x_B}{\frac{1}{3}}, \frac{x_C}{3} \right\}$$

نکته ۱۲ همواره جنس توابع مونتاژ، Min می باشد.



مثال ۳- یک محصول از مونتاژ ۲ قطعه B و A حاصل می شود، به این صورت که ۲ قطعه از A و ۴ قطعه از B اگر باهم مونتاژ شوند محصول اصلی را می سازند. اگر هدف ما حداکثر نمودن تولید این محصول مونتاژی باشد، تابع هدف را بنویسید.



پاسخ: محصول مونتاژی

Max(تعداد)  $\Rightarrow x_C \Rightarrow x = \text{ضریب} = 1$  تعداد

$$\begin{array}{ccc} & x_C & \\ 10 & \swarrow \searrow & 4 \\ 2(x_A) & & x_B(4) \\ 20 & & 16 \end{array} \quad x_C = \min \left\{ \frac{x_A}{2}, \frac{x_B}{4} \right\} \Rightarrow \text{Max(تعداد)} = \min \left\{ \frac{x_A}{2}, \frac{x_B}{4} \right\}$$

سوال ۶- یک محصول از مونتاژ دو قطعه A و B ساخته می شود، در صورتی که مقدار تولید این محصول  $x_A$  و  $x_B$  مقدار تولید این دو قطعه باشد، تابع هدف مدل این مسئله به چه صورت است؟

$$\text{Max} Z = \text{Min} \{x_A, x_B\} \quad (2) \quad \text{Max} Z = x_A + x_B \quad (1)$$

$$\text{Min} Z = \text{Max} \{x_A, x_B\} \quad (4) \quad \text{Max} Z = \text{Min} \{x_A + x_B\} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

حداکثر مقدار تولید محصول (Z) به مقدار تولید قطعه کمتر است.

$$\text{Max} Z = \text{Min} \{x_A, x_B\}$$

همواره جنس توابع مونتاژ، Min می باشد.

نکته ۱۳ تابع مونتاژ شروع کننده تابع مرکب است. تابع دوم همیشه Min است (مربوط به محصول مونتاژ است) و تابع اول به صورت سؤال وابسته است که می تواند Min یا Max باشد.



مثال ۴- یک شرکت تولیدی دو محصول B و A را با ضرایب مصرف  $\frac{1}{3}$  و ۲ برای تولید محصول اصلی خود مونتاژ می کند. اگر هدف ما حداکثر نمودن تولید این محصول مونتاژی باشد و حداکثر تعدادی که از دو قطعه B و A موجود می باشد ۱۲ واحد باشد، مدل فوق را بنویسید و آن را معادل سازی کنید:



پاسخ:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Rightarrow \text{Max} \left\{ \frac{x_A}{2}, \frac{x_B}{\frac{1}{3}} \right\} \\ x_A + x_B \leq 12 \end{array} \right. \quad \text{معادل سازی} \quad \text{Max} = y \quad (\text{تعداد})$$

$$= \min \left\{ \frac{x_A}{2}, \frac{x_B}{\frac{1}{3}} \right\} = y \quad (\text{تعداد})$$

$$\frac{x_A}{2} \geq y, \quad 3x_B \geq y \quad x_A + x_B \leq 12$$

## توابع مرکب

توابع  $\left. \begin{array}{l} \text{Min}z = \text{Max} \{ \} \\ \text{Max}z = \text{Min} \{ \} \end{array} \right\}$  را توابع مرکب گویند. برای حل چنین سؤالاتی کفایت زمانی که مجموعه از جنس Max است، مجموعه را مساوی متغیری مثل  $y$  قرار داده و توابع داخل مجموعه را کوچکتر مساوی  $(\leq)$ ،  $y$  قرار دهیم و در حالتی که مجموعه از جنس Min است توابع داخل مجموعه را بزرگتر مساوی  $(\geq)$ ،  $y$  قرار می‌دهیم.

نکته ۱۴ در توابع مرکب، با تابع هدف کار داریم.

## مدل‌های برنامه‌ریزی خطی

۱- تبدیل توابع هدف قدر مطلق:

$$*\text{Max}|g(x)| \Rightarrow \text{Max}z$$

$$|g(x)| \geq z$$

$$*\text{Min}|g(x)| \Rightarrow \text{Min}z$$

$$|g(x)| \leq z$$

۲- تبدیل محدودیت‌های قدر مطلق:

$$*|g(x)| \leq b \Rightarrow \begin{cases} g(x) \leq b \\ g(x) \geq -b \end{cases}$$

$$*|g(x)| \geq b \Rightarrow \begin{cases} g(x) \geq b \\ g(x) \leq -b \end{cases}$$

۳- توابع معکوس:

$$\text{Max}z = \frac{1}{3x_1 - 6x_2 + 2x_3} \Rightarrow \text{Min}z' = 3x_1 - 6x_2 + 2x_3$$

سوال ۷- معادله برنامه‌ریزی خطی زیر را بنویسید:

$$\text{Max}z = \frac{1}{3x_1 + x_2}$$

$$\text{st}: |x_1 + x_2| \leq 12$$

پاسخ: در توابع کسری که صورت آنها یک عدد می‌باشد و مخرج آن ترکیبی از متغیرهای تصمیم است، کافی است به جای آنکه تابع اصلی را حل کنیم، تابع مخرج کسر را محاسبه کرده و بعد از حل مسئله مقدار مخرج را در تابع اصلی بگذاریم و مقدار مسئله اصلی مشخص شود.

$$\text{Min}z' = 3x_1 + x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 12$$

$$x_1 + x_2 \geq -12$$

سوال ۸- مدل ارائه شده متناظر با کدام مدل است؟

$$\text{Max}z = \min \{3x_1 + 2x_2, 5x_1 - x_2\}$$

$$\text{s.t.: } 4x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$\begin{aligned} \text{Max}z &= 3x_1 + 2x_2 \\ 4x_1 + 2x_2 &\leq 12 \\ 5x_1 - x_2 &\geq 0 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Max}z &= y \\ 3x_1 + 2x_2 - y &\leq 0 \\ 5x_1 - x_2 - y &\leq 0 \\ 4x_1 + 2x_2 &\leq 0 \\ x_1, x_2, y &\geq 0 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \text{Min}z &= 8x_1 + x_2 \\ 4x_1 + 2x_2 &\leq 12 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Max}z &= y \\ 3x_1 + 2x_2 - y &\geq 0 \\ 5x_1 - x_2 - y &\geq 0 \\ 4x_1 + 2x_2 &\leq 12 \\ x_1, x_2, y &\geq 0 \end{aligned} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۳

برای اینکه بتوان مدل را به صورت یک مدل برنامه‌ریزی خطی نوشت، Maxz را مساوی y قرار می‌دهیم و سپس طبق قواعد توابع مرکب، توابع داخل مجموعه را چون تابع Min است بزرگ‌تر مساوی y قرار می‌دهیم.

۴- تبدیل متغیر آزاد در علامت به متغیر نامنفی:

اگر متغیر  $x_j$  در یک مدل برنامه‌ریزی خطی آزاد در علامت باشد، می‌توان آن را به صورت تفاضل دو متغیر نامنفی نوشت:

$$x_j = x'_j - x''_j$$

$$x'_j, x''_j \geq 0$$

۵- تبدیل متغیر از حالت  $x_j \leq 0$  به  $x_j \geq 0$ :

اگر در مسئله متغیر تصمیمی به صورت  $x_j \leq 0$  باشد، در این صورت  $-x_j \geq 0$  است و با فرض  $x'_j = -x_j$ ،  $x'_j \geq 0$  خواهد بود و در مسئله  $x_j = -x'_j$  قرار می‌دهیم.

۶- تبدیل متغیر از حالت  $x_j \geq L$  به  $x_j \geq 0$ :

اگر در مسئله متغیر تصمیمی به صورت  $x_j \geq L$  باشد، در این صورت  $x_j - L \geq 0$  است و با فرض  $x'_j = x_j - L$ ،  $x'_j \geq 0$  خواهد بود و در مسئله نیز  $x_j = x'_j + L$  را قرار می‌دهیم.

۷- حذف قدرمطلق از حالت  $|x_j|$ :

اگر در مسئله متغیر تصمیمی به صورت  $|x_j|$  باشد ( $x_j$  آزاد در علامت)، در این صورت به جای  $|x_j|$ ،  $x'_j - x''_j$  را با فرض  $x'_j, x''_j \geq 0$  قرار می‌دهیم.

۸- فرم استاندارد مسئله برنامه‌ریزی خطی:

مدل استاندارد یک مسئله برنامه‌ریزی خطی دارای شرایط زیر است:

الف- تابع هدف از نوع حداکثرسازی (Max) یا حداقلسازی (Min) است.

ب- تمامی محدودیت‌های مسئله به صورت مساوی است.

پ- مقادیر سمت راست ( $b_i$ ) نامنفی باشند. ( $b_i \geq 0$ )

ت- تمامی متغیرهای تصمیم مسئله غیرمنفی باشند. ( $x_j \geq 0$ )

نکته ۱۵ در صورتی که در مسئله‌ای فرض تناسب یا جمع‌پذیری صدق نکند، مدل به مدل برنامه‌ریزی غیرخطی تبدیل می‌شود و اگر فرض بخش‌پذیری صدق نکند، مدل به مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح تبدیل می‌شود.





نکته ۱۶ مدل‌های برنامه‌ریزی کمی، ۵ مدل می‌باشند:  
۱- خطی ۲- غیر خطی ۳- عدد صحیح ۴- پارامتریک ۵- پویا

۹- تبدیل محدودیت نامساوی به تساوی:

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 \geq b_1 &\Rightarrow a_1x_1 + a_2x_2 - S_1 = b_1 \\ x_1, x_2 \geq 0 &\quad x_1, x_2, S_1 \geq 0 \end{aligned}$$

۱۰- متغیرهایی که از بالا یا پایین کراندار هستند:

$$\begin{aligned} a_1x_1 + a_2x_2 \geq b_1 &\Rightarrow a_1x_1 + a_2x_2 + S_1 = b_1 \\ x_1, x_2 \geq 0 &\quad x_1, x_2, S_1 \geq 0 \end{aligned}$$

$$x_j \geq I_j \Rightarrow x'_j = x_j - I_j \quad (x_j \geq 0)$$

$$x_j \leq I_j \Rightarrow x'_j = I_j - x_j$$



## سؤالات چهارگزینه‌ای فصل اول

۱- در صورتی که میزان منابع لازم برای تولید یک واحد محصول ۲ و برای دو واحد از همین محصول ۳/۵ باشد، کدامیک از مفروضات برنامه ریزی خطی نقض گردیده است.

(بازرگانی ۷۲)

- (۱) فرض تناسب (۲) فرض جمع پذیری (۳) فرض بخش پذیری (۴) فرض معین بودن

مدل‌های زیر را در نظر بگیرید.

$$\text{Min}Z = 25x_1 + 30x_2 + 18x_3$$

$$x_1 \geq 8$$

$$x_1 + x_2 \geq 12$$

$$0.05x_1 - x_2 = 1$$

$$x_1, x_2 \geq 10$$

(۲)

$$\text{Max}Z = 3x_1 + 5x_2 + 99x_3$$

$$x_1 \geq 10$$

$$x_2 \leq 5$$

$$x_3 \geq 18$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_3 \geq 0$$

(۱)

$$\text{Min}Z = p_1d_1^- + p_2d_2^+ + p_3d_3^+$$

$$x_1 + x_2 + d_1^- - d_1^+ = 300$$

$$x_2 + d_2^- - d_2^+ = 200$$

$$x_1 + d_3^- - d_3^+ = 100$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+, d_3^-, d_3^+ \geq 0$$

(۳)

$$\text{Min}Z = 3x_1 + 4x_2$$

$$x_1 + x_2 \geq 8$$

$$3x_1 + 4x_2 \geq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

(۴)

۲- کدامیک از موارد زیر برای مشخص کردن نوع مدل درست است؟ (به ترتیب برای مدل‌های ۱، ۲، ۳ و ۴)

- (۱) خطی، خطی، خطی (۲) خطی، غیرخطی، خطی (۳) خطی، غیرخطی، غیرخطی (۴) خطی، غیرخطی، خطی، غیرخطی

۳- نسبت تعداد واحدهای تولید شده برای دو محصول که مقدار تولیدشان با  $x_1$  و  $x_2$  به نمایش گذارده می‌شوند به ترتیب متناسب با ۵ و ۲ است کدامیک از محدودیت‌های زیر این وضعیت را نشان می‌دهد.

(بازرگانی ۷۳)

$$x_1x_2 = \frac{5}{2} \quad (۴)$$

$$x_1 + x_2 = \frac{5}{2} \quad (۳)$$

$$2x_1 = 5x_2 \quad (۲)$$

$$5x_1 = 2x_2 \quad (۱)$$

۴- در صورتی که مقدار کلسیم موجود در سه ماده معدنی برای تولید یک محصول به ترتیب ۳۸۰ و ۰/۰۰۱ و ۰/۰۰۲ بوده و حداقل و حداکثر مقدار کلسیم در این محصول ۰/۸٪ و ۱/۲٪ باشد و تولید ۱۰۰ کیلو از محصول مدنظر باشد کدامیک از محدودیت‌های زیر این وضعیت را بیان می‌دارد ( $x_1$  و  $x_2$  و  $x_3$  مقدار مواد معدنی را نشان می‌دهند).

(صنعتی ۷۳)

$$0.8 \leq 0.38x_1 + 0.001x_2 + 0.002x_3 \leq 1.2 \quad (۲) \quad 0.38x_1 + 0.001x_2 + 0.002x_3 \leq 0.12 \times 100 \quad (۱)$$

$$0.38x_1 + 0.001x_2 + 0.002x_3 \geq 0.08 \times 100 \quad (۳) \quad ۱ و ۳ \quad (۴)$$

۵- اگر  $I_t$  موجودی در پایان دوره  $t$ ام،  $d_t$  تقاضا در دوره  $t$ ام،  $I$  موجودی در اول دوره و  $x_t$  تولید در دوره  $t$ ام باشد کدامیک از روابط زیر صحیح است:

(صنعتی ۷۳)

$$I_t = I_0 + \sum_{i=1}^t (x_i - d_i) \quad (۲)$$

$$I_t = \sum_{i=0}^t I_i + \sum_{i=1}^t (x_i - d_i) \quad (۱)$$

(۴) هیچکدام

$$I_t = I_{t-1} + \sum_{i=0}^t x_i - \sum_{i=0}^t d_i \quad (۳)$$

(مسأله ۷۳)

۶- در یک مسأله موجودی چند دوره‌ای: ( $n = 6$ )

$C_t$  = هزینه تولید یک واحد در دوره  $t$

$x_t$  = مقدار تولید کالا در دوره  $t$

$h_t$  = هزینه نگهداری یک واحد کالا در دوره  $t$

$I_t$  = موجودی کالا در دوره  $t$

می‌باشد. تابع هدف مسأله عبارت است از:

$$\text{Max} \sum_{t=1}^6 C_t x_t + \sum_{t=1}^6 h_t I_t \quad (2)$$

$$\text{Min} \sum_{t=1}^6 C_t x_t + \sum_{t=1}^6 h_{t-1} I_{t-1} \quad (1)$$

$$\text{Min} \sum_{t=1}^6 (x_t + I_t)(C_t + h_t) \quad (4)$$

$$\text{Min} \sum_{t=1}^6 C_t x_t + \sum_{t=1}^6 h_t I_t \quad (3)$$

۷- اگر هزینه تولید محصولات A و B به ترتیب ۶ و ۵ تومان باشد و از طرفی نیروی انسانی مورد نظر برای تولید این دو محصول، ۲ و ۳ نفر- ساعت باشد، به منظور حداکثر کردن مقدار تولید محصولات A و B، کدام گزینه بیانگر تابع هدف

(مسأله ۷۴)

این مسأله می‌باشد ( $x_B, x_A$  به ترتیب نشانگر مقدار تولید محصولات A و B است).

$$\text{Max} Z = 2x_A + 3x_B \quad (2) \quad \text{max} Z = x_A + x_B \quad (1)$$

$$\text{Max} Z = 12x_A + 15x_B \quad (4) \quad \text{Max} Z = 6x_A + 5x_B \quad (3)$$

(بازرگانی، صنعتی ۷۴)

۸- در صورتی که حداکثر اختلاف تولید دو محصول ۶ واحد باشد، محدودیت مربوطه کدام است؟

( $x_B, x_A$  به ترتیب تعداد محصولات A, B است.)

$$x_A - x_B = 6 \quad (1) \quad x_A - x_B \leq 6 \quad (2) \quad x_B - x_A \leq 6 \quad (3) \quad -6 \leq x_A - x_B \leq 6 \quad (4)$$

۹- با توجه به وجود دو محصول ( $x_1, x_2$ ) در یک برنامه تولید، اگر مقدار تولید محصول اول حداکثر دو برابر محصول دوم و تقاضا برای محصول دوم سه برابر تقاضای محصول اول باشد، کدام گزینه به عنوان مدل مسأله قابل قبول است؟

(بازرگانی، صنعتی ۷۴)

$$x_1 - 2x_2 \leq 0, 3x_1 + x_2 = 0 \quad (2) \quad x_1 - 2x_2 \leq 0, 3x_1 - x_2 = 0 \quad (1)$$

$$x_1 - 2x_2 \geq 0, 3x_1 + x_2 \geq 0 \quad (4) \quad x_1 - 2x_2 = 0, 3x_1 - x_2 \leq 0 \quad (3)$$

(بازرگانی، صنعتی ۷۴)

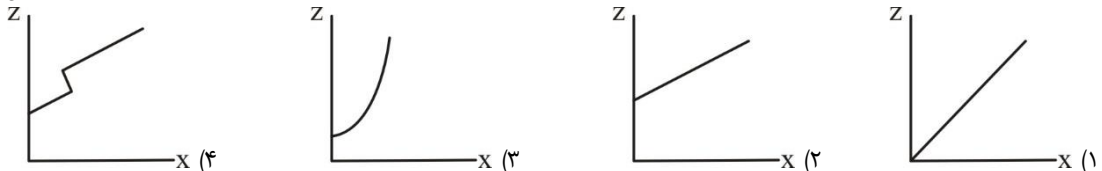
۱۰- گزینه محدودیت برنامه‌ریزی خطی کدام است؟

$$x_1 + x_2 \geq \frac{2}{x_1} \quad (4) \quad x_1, x_2 + x_3 \leq 2 \quad (3) \quad \frac{x_1 + x_2}{x_3} \geq 2 \quad (2) \quad x_1 + \frac{x_2}{x_3} \leq 2 \quad (1)$$

۱۱- در یک مسأله برنامه‌ریزی خطی اگر Z مقدار سود کل و X مقدار تولید محصول را نشان دهد، کدام شکل بیانگر رابطه

(بازرگانی، صنعتی ۷۴)

X, Z است؟



۱۲- زمان مورد نیاز برای هر واحد از محصول  $x_1$  نیم برابر محصول  $x_2$  و دو برابر محصول  $x_3$  است. اگر تمام وقت نیروی انسانی صرف تولید محصول  $x_2$  شود جمعاً می‌توان ۳۰۰ واحد از محصول  $x_2$  تولید کرد. محدودیت مربوطه کدام است؟

(بازرگانی ۷۳، بازرگانی و صنعتی ۷۵، ۸۶)

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 600 \quad (2) \quad x_1 + 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 \leq 600 \quad (1)$$

$$x_1 + 2x_2 + \frac{1}{3}x_3 \leq 300 \quad (4) \quad 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 300 \quad (3)$$

۱۳- برآثر افزایش مهارت کارگران، زمان ساخت یک قطعه رو به کاهش است. مسأله‌ای با این محدودیت، قابل حل توسط کدام مدل برنامه‌ریزی است؟

(بازرگانی، صنعتی ۷۵، ۸۱)

(۱) آرمانی (۲) تخصیص (۳) خطی (۴) غیرخطی

۱۴- در صورتی که عبارت زیر قسمتی از توصیف یک مدل باشد کدامیک از گزینه‌ها صحیح است. «نسبت فروش محصول  $x_1$  به حاصل جمع فروش دو محصول  $x_2, x_3$  حداقل برابر  $\frac{1}{6}$  است.»

(بازرگانی، صنعتی ۷۵)

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{1}{6}x_2 - \frac{1}{6}x_3 &\leq 0 \quad (2) & x_1 - \frac{1}{6}x_2 - \frac{1}{6}x_3 &\geq 0 \quad (1) \\ x_1 + \frac{1}{6}x_2 + \frac{1}{6}x_3 &\geq 0 \quad (4) & x_1 - \frac{1}{6}x_2 + \frac{1}{6}x_3 &\leq 0 \quad (3) \end{aligned}$$

۱۵- ۶۴ نفر باید در چادرهای ۴ نفره و ۸ نفره اسکان یابند. تعداد کل چادرهایی که این افراد می‌توانند با خود حمل نمایند حداکثر ۱۳ چادر است. اگر  $x_B, x_A$  به ترتیب نشان‌دهنده تعداد چادرهای نوع ۴ نفره و ۸ نفره باشند، کدام محدودیت‌ها درست است؟

(بازرگانی، صنعتی ۷۵)

$$\begin{aligned} 4x_A + 8x_B \leq 64, x_A + x_B \leq 13 \quad (2) & \quad 4x_A + 8x_B = 64; x_A + x_B \leq 13 \quad (1) \\ 4x_A + 8x_B = 64, x_A + x_B = 13 \quad (4) & \quad 4x_A + 8x_B \geq 64; x_A + x_B = 13 \quad (3) \end{aligned}$$

۱۶- شرکتی درصدد حداقل کردن تعداد پرسنل خود می‌باشد. کل بودجه شرکت ۱۰۰۰ واحد می‌باشد. اگر هزینه پرسنلی در هر بخش  $C_i$  باشد. تابع هدف کدام است؟

(بازرگانی، صنعتی ۷۶)

$$\text{Min}Z = \sum_i C_i x_i \quad (2) \quad \text{Min}Z = \sum_i C_i x_i + 1000 \quad (1)$$

$$\text{Min}Z = \sum_i x_i \quad (4) \quad \text{Min}Z = \sum_i C_i \quad (3)$$

۱۷- در صورتی که در یک مدل برنامه‌ریزی خطی فقط سه فرض: جمع‌پذیری، معین بودن، بخش‌پذیری صادق باشد و فرض تناسب برقرار نباشد، مدل به دست آمده چگونه مدلی است؟

(مسابرداری ۷۶)

(۱) پویا (۲) خطی (۳) عدد صحیح (۴) غیرخطی

۱۸- نمایش خطی محدودیتی مانند  $|8x_1 + 9x_2| \leq 120$  در مدل مطابق است با:

(بازرگانی و صنعتی ۷۹)

$$\begin{aligned} 8x_1 - 9x_2 \leq 120, \quad 8x_1 - 9x_2 &= 120 \quad (1) \\ 8x_1 - 9x_2 \geq 120, \quad 8x_1 + 9x_2 &\leq 120 \quad (2) \\ 8x_1 + 9x_2 \leq 120, \quad 8x_1 + 9x_2 &= 120 \quad (3) \\ 8x_1 + 9x_2 \leq 120, \quad -8x_1 - 9x_2 &\leq 120 \quad (4) \end{aligned}$$

۱۹- در یک سیستم تولید، دو ماشین با ظرفیت‌های ۴۰ و ۶۰ ساعت، عملیات مربوط به سه فعالیت  $x_1, x_2, x_3$  را انجام می‌دهند. در صورتی که میزان مصرف فعالیت‌ها از زمان ماشین‌آلات مطابق با جدول زیر بوده و قرار باشد برای حفظ توازن، نسبت زمان استفاده از دو ماشین برابر باشد، کدامیک از گزینه‌ها صحیح است؟

(مسابرداری ۷۶)

| فعالیت | ماشین ۱ | ماشین ۲ |
|--------|---------|---------|
| ۱      | ۳       | ۴       |
| ۲      | ۲       | ۳       |
| ۳      | ۵       | ۶       |
| ظرفیت  | ۴۰      | ۶۰      |

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\geq 0 \quad (1) & x_1 + 3x_3 &= 0 \quad (2) \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 &\geq 0 \quad (3) & x_1 + x_2 + 4x_3 &= 0 \quad (4) \end{aligned}$$

۲۰- به منظور تعادل در پرواز در دو قسمت جلو و عقب هواپیما بار نگهداری می‌شود. مقدار باری که در هر قسمت جلو باید قرارداد  $\frac{2}{3}$  مقدار باری است که در قسمت عقب باید باشد و حداکثر وزن بار ۵۰۰ کیلوگرم است، محدودیت مربوطه کدام است؟

(بازرگانی، صنعتی ۷۷)

$x_1$  = مقدار بار در قسمت جلو

$x_2$  = مقدار بار در قسمت عقب

$$x_1 + \frac{2}{3}x_2 \leq 500 \quad (2)$$

$$x_1 + x_2 \leq 500, x_1 - \frac{2}{3}x_2 = 0 \quad (1)$$

$$x_1 + x_2 \leq 500, \frac{2}{3}x_1 - x_2 = 0 \quad (4)$$

$$\frac{2}{3}x_1 + x_2 \leq 500 \quad (3)$$

۲۱- یک محصول از مونتاژ دو قطعه A و B ساخته می‌شود. در صورتیکه Z مقدار تولید این محصول  $x_B, x_A$  مقدار تولید این دو قطعه باشد، تابع هدف مدل این مسأله به چه صورت است؟

(بازرگانی، صنعتی ۷۷ و ۸۱)

$$\text{Max} Z = \min\{x_A, x_B\} \quad (2)$$

$$\text{Max} Z = x_A + x_B \quad (1)$$

$$\text{Min} Z = \text{Max}\{x_A, x_B\} \quad (4)$$

$$\text{Max} Z = \text{Min}\{x_A + x_B\} \quad (3)$$

۲۲- مبلغی که حداکثر می‌توان در دو پروژه سرمایه‌گذاری کرد ۳۰ میلیون ریال می‌باشد. سرمایه‌گذاری در پروژه دوم نباید از ۵۰٪ مجموع سرمایه‌گذاری در دو پروژه تجاوز کند معاملات خطی کدامند؟

(بازرگانی، صنعتی ۷۸)

$$x_2 \leq 0.5x_1$$

$$x_1 + x_2 \leq 30 \quad (2)$$

$$x_2 \leq 0.5(x_1 + x_2)$$

$$x_1 + x_2 \leq 30 \quad (1)$$

$$x_2 \leq 0.5(x_1 + x_2)$$

$$x_1 + x_2 = 30 \quad (4)$$

$$x_2 \geq 0.5x_1$$

$$x_1 + x_2 \leq 30 \quad (3)$$

۲۳- یک شرکت تبلیغاتی مایل است یک برنامه تبلیغاتی را از طریق تلویزیون، رادیو و مجله به اجرا درآورد. در صورتی که هدف از ارائه این برنامه جذب حداکثر مشتریان بالقوه شرکت متقاضی باشد، با توجه به اطلاعاتی که در این مورد در جدول زیر ارائه شده است تابع هدف این مسأله را طرح کنید.

(بازرگانی، صنعتی ۷۸)

| نوع آگهی             | آگهی      | آگهی    | آگهی    |
|----------------------|-----------|---------|---------|
| مشتریان              | تلویزیونی | رادیویی | در مجله |
| تعداد مردان قابل جذب | ۵۰۰۰۰     | ۳۰۰۰۰   | ۱۰۰۰۰   |
| تعداد زنان قابل جذب  | ۴۰۰۰۰     | ۲۰۰۰۰   | ۱۰۰۰۰   |
| هزینه هر بار تبلیغ   | ۱۵۰۰۰     | ۶۰۰۰    | ۳۰۰۰    |

$$\min Z = 150000x_1 + 60000x_2 + 30000x_3 \quad (1)$$

$$\max Z = 400000x_1 + 200000x_2 + 100000x_3 \quad (2)$$

$$\max Z = 500000x_1 + 300000x_2 + 100000x_3 \quad (3)$$

$$\max Z = 900000x_1 + 500000x_2 + 200000x_3 \quad (4)$$

۲۴- تولیدکننده‌ای که به ساختن دو محصول شماره ۱ و ۲ مشغول است، می‌خواهد برنامه تولید خود را طوری تنظیم نماید که میزان تولید محصول اول حداقل دو برابر محصول دوم باشد؛ در عین حالی که می‌داند تقاضا برای محصول دوم بیش از ۲۰ واحد نیست؛ لیکن تعهد کرده است که حداقل ۱۵ واحد از این محصول را تولید نماید. کدام محدودیت‌ها بیانگر این مسأله هستند؟

(بازرگانی، صنعتی ۷۹)

$$x_2 = 15, x_2 \leq 20, x_1 - 2x_2 \geq 0 \quad (2)$$

$$15 \leq x_2 \leq 20, x_1 - 2x_2 \geq 0 \quad (1)$$

$$x_2 \leq 15, x_2 = 20, \frac{1}{2}x_1 - x_2 \geq 0 \quad (4) \quad 15 \leq x_2 \leq 20, x_1 - 2x_2 = 0 \quad (3)$$

۲۵- در یک مدل برنامه ریزی تولید برای ششم ماه، امکان تولید در دو شیفت عادی و اضافه کاری وجود دارد. تولیدات هر ماه می تواند در همان ماه به فروش رسیده یا در ماه های بعد به فروش برسد. متغیر  $x_{ijk}$  مقدار تولید را با توجه به  $i=1,2,\dots,6$  ماه تولید،  $j=1,2$  شیفت تولید و  $k=1,2,\dots,6$  ماه فروش نشان می دهد. کدامیک از متغیرهای تصمیم برای این مدل معتبر است؟

$$x_{321} \quad (4) \quad x_{314} \quad (3) \quad x_{211} \quad (2) \quad x_{134} \quad (1)$$

۲۶- شرکتی، الوارهایی با طول استاندارد ۱۲ متر را در طول های ۴ و ۵ متر برش می دهد. مدلی که تابع هدف آن حداقل سازی تعداد الوار مصرف شده باشد، چند محدودیت دارد؟

$$4 \quad (4) \quad 3 \quad (3) \quad 2 \quad (2) \quad 1 \quad (1)$$

۲۷- مدل ارائه شده متناظر با کدام مدل است؟

$$\max Z = \min \{3x_1 + 2x_2, 5x_1 - x_2\}$$

$$\text{s.t.:} \quad 4x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$\max Z = 3x_1 + 2x_2$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 12 \quad (2)$$

$$5x_1 - x_2 \geq 0$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\min Z = 8x_1 + x_2$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 12 \quad (1)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\max Z = y$$

$$3x_1 + 2x_2 - y \leq 0$$

$$5x_1 - x_2 - y \leq 0 \quad (4)$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$\max Z = y$$

$$3x_1 + 2x_2 - y \geq 0$$

$$5x_1 - x_2 - y \geq 0 \quad (3)$$

$$4x_1 + 2x_2 \leq 12$$

۲۸- در ساخت یک محصول مشخص الف، دو قطعه ۱ و ۲ استفاده می شود به طوریکه هر واحد الف از ۳ قطعه ۱ و ۲ قطعه ۲ ساخته می شود. این قطعات می بایست از بیرون تهیه شود. اگر میزان تولید محصول الف در دوره برنامه ریزی A و میزان خرید قطعات ۱ و ۲، به ترتیب  $x_1$  و  $x_2$  بوده و قیمت فروش هر واحد محصول الف، ۱۰۰ تومان باشد؛ مدل برنامه ریزی خطی برای تهیه قطعات و ساخت محصول با هدف بیشینه سازی درآمد کل عبارتند از:

$$\max Z = 100A$$

$$\text{s.t.} \quad A = \max \left\{ \frac{x_1}{3}, \frac{x_2}{2} \right\} \quad (2)$$

$$A, x_1, x_2 \geq 0$$

$$\max Z = 100A$$

$$\text{s.t.} \quad A - 3x_1 \leq 0$$

$$A - 2x_2 \leq 0 \quad (1)$$

$$A, x_1, x_2 \geq 0$$

$$\max Z = 100A$$

$$\text{s.t.} \quad 3A - x_1 \leq 0$$

$$2A - x_2 \leq 0 \quad (4)$$

$$A, x_1, x_2 \geq 0$$

$$\max Z = 100A$$

$$\text{s.t.} \quad A = \min \left\{ \frac{x_1}{3}, \frac{x_2}{2} \right\} \quad (3)$$

$$A, x_1, x_2 \geq 0$$

۲۹- در یک کارخانه تولیدی هزینه تغییر سرعت تولید از  $i$  به  $i+1$  (کاهش یا افزایش) به ازاء هر واحد تولید برابر ۴ واحد پولی می باشد. تابع هدف در چنین مسأله ای برای  $n$  پریود برابر است با:

$$\max Z = \sum_{i=1}^n 4|x_{i+1} - x_i| \quad (2)$$

$$\min Z = \sum_{i=1}^n 4(x_{i+1} - x_i) \quad (4)$$

$$\min Z = \sum_{i=1}^n 4|x_i - x_{i+1}| \quad (1)$$

$$\min Z = \sum_{i=1}^n 4(x_i - x_{i+1}) \quad (3)$$

۳۰- مدل معادل با مدل زیر کدام است؟

(بازرگانی، صنعتی ۸۲)

$$\min Z = \frac{1}{3x_1 - 3x_2 + 7x_3}$$

$$\text{st: } |\Delta x_1 + 4x_2 - 8x_3| \leq 100$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\min Z' = 3x_1 - 3x_2 + 7x_3$$

$$\Delta x_1 + 4x_2 - 8x_3 \leq 100 \quad (2)$$

$$\Delta x_1 + 4x_2 - 8x_3 \geq 100$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\max Z' = -3x_1 + 3x_2 - 7x_3$$

$$\Delta x_1 + 4x_2 - 8x_3 \leq 100 \quad (1)$$

$$\Delta x_1 + 4x_2 - 8x_3 \leq -100$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\min Z' = -3x_1 + 3x_2 - 7x_3$$

$$\Delta x_1 + 4x_2 - 8x_3 \leq 100 \quad (4)$$

$$-\Delta x_1 - 4x_2 + 8x_3 \geq -100$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\max Z' = 3x_1 - 3x_2 + 7x_3$$

$$\Delta x_1 + 4x_2 - 8x_3 \leq 100 \quad (3)$$

$$\Delta x_1 + 4x_2 - 8x_3 \geq -100$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

۳۱- مجموعه محدودیت‌های زیر:

(بازرگانی، صنعتی ۸۳)

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 4$$

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6$$

معادل است با:

$$2x_1 + x_2 - x_3 \leq 4$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 \geq 4 \quad (2)$$

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 6$$

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq -6$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 \leq 4$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 \geq 4 \quad (1)$$

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 6$$

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq -6$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 \leq 4$$

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 6 \quad (4)$$

$$5x_1 + 5x_2 + x_3 \geq 10$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 \leq 4$$

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 6 \quad (3)$$

$$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 6$$

۳۲- در صورتی که  $x_j$  اندازه تولید محصول  $j$  باشد، کدام گزینه سود حاصل از تولید این محصول را نشان می‌دهد؟ ( $C_j$  بهره‌وری نسبی و  $F_j$  هزینه ثابت تولید محصول مربوط است.)

(بازرگانی، صنعتی ۸۴)

$$P_j = \begin{cases} c_j x_j + F_j & x_j \geq 0 \\ 0 & x_j \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$P_j = \begin{cases} c_j x_j + F_j & x_j > 0 \\ 0 & x_j = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$P_j = \begin{cases} c_j x_j - F_j & x_j > 0 \\ 0 & x_j = 0 \end{cases} \quad (4)$$

$$P_j = \begin{cases} c_j x_j - F_j & x_j \geq 0 \\ 0 & x_j \leq 0 \end{cases} \quad (3)$$

۳۳- در طرح توسعه یک موسسه، احداث تعداد انبارها ( $x_i$ ) مورد توجه است. در صورتی که بودجه کل این موسسه  $A$  واحد پولی و هزینه احداث انبار  $a_i$  باشد، تابع هدف کدام است؟

(بازرگانی، صنعتی ۸۵)

$$\min z = \sum_i a_i x_i \quad (2)$$

$$\min z = \sum_i x_i \quad (1)$$

$$\min z = \sum_i (a_i + A) x_i \quad (4)$$

$$\min z = \sum_i a_i x_i + A \quad (3)$$

۳۴- از دو نوع نفت تصفیه شده داخلی و خارجی، دو نوع بنزین نوع R و P تولید می‌شود. ماکزیمم فشار بخار و می‌نیمم درجه اکتان موجود در نفت‌ها و مورد نیاز در بنزین‌ها در هر بشکه در جدول زیر داده شده است. اگر میزان مصرف نفت در تولید بنزین مطابق جدول زیر برحسب بشکه باشد، میزان درجه اکتان مورد نیاز در بنزین نوع R چقدر است؟ (بازرگانی، صنعتی ۸۷)

| بنزین \ نفت | R     | P     |
|-------------|-------|-------|
| داخلی       | $X_1$ | $X_3$ |
| خارجی       | $X_2$ | $X_4$ |

| می‌نیمم درجه اکتان | ماکزیمم فشار بخار |             |
|--------------------|-------------------|-------------|
| ۷۸                 | ۲۰                | نفت داخلی   |
| ۸۹                 | ۱۸                | نفت خارجی   |
| ۸۵                 | ۲۴                | بنزین نوع R |
| ۹۶                 | ۲۲                | بنزین نوع P |

$$7X_1 + 8X_2 \leq 0 \quad (۴) \quad 7X_1 + 8X_2 \geq 0 \quad (۳) \quad 7X_1 - 4X_2 \geq 0 \quad (۲) \quad 7X_1 - 4X_2 \leq 0 \quad (۱)$$

۳۵- با در نظر گرفتن  $X_1$  و  $X_2$  برای دو فعالیت در یک مسئله برنامه‌ریزی خطی، کدام وضعیت مبین شرایط زیر است؟ (بازرگانی، صنعتی ۸۹)

الف) میزان فعالیت  $X_1$  حداقل ۵ برابر  $X_2$  باشد.

ب) حداقل ۴۰ واحد از این دو فعالیت انجام پذیرد.

ج) میزان فعالیت  $X_1$  به کل فعالیت‌ها حداکثر ۵۰ درصد باشد.

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 &\geq 40 & 0/5X_1 - 0/5X_2 &\leq 0 & X_1 &\geq 5X_2 & (۱) \\ X_1 + X_2 &= 40 & 0/5X_1 + 0/5X_2 &\geq 0 & X_1 &\leq 5X_2 & (۲) \\ X_1 + X_2 &\geq 40 & 0/5X_1 - 0/5X_2 &\geq 0 & X_1 &\leq 5X_2 & (۳) \\ X_1 + X_2 &\geq 40 & 0/5X_1 - 0/5X_2 &\leq 0 & X_1 &\leq 5X_2 & (۴) \end{aligned}$$

۳۶- نوعی از بنزین از ترکیب دونوع نفت خام تهیه می‌شود، مقدار اکتان موجود در این نفت‌ها به ترتیب برابر ۱۱ و ۶ است. در صورتی که لازم باشد سطح اکتان در بنزین حداقل برابر ۹ باشد، کدامیک از محدودیت‌های زیر صحیح است؟ (بازرگانی، صنعتی ۸۹)

( $X_1$  و  $X_2$  عبارتند از مقدار نفت خام ۱ و ۲ که در تولید بنزین استفاده می‌شود.)

$$\begin{aligned} 2X_1 - 3X_2 &\leq 0 & (۲) & & 2X_1 - 3X_2 &\geq 0 & (۱) \\ 2X_1 - 3X_2 &= 0 & (۴) & & 3X_1 - 2X_2 &\geq 0 & (۳) \end{aligned}$$

۳۷- تابع هدف یک مسئله به صورت  $\max Z = \min\{5X_1 + 6X_2, 7X_1 + 9X_2\}$  تعریف شده است. تبدیل خطی آن کدام است؟

$$\begin{aligned} 12X_1 + 15X_2 - y &= 0 & (۲) & & \begin{cases} 5X_1 + 6X_2 - y = 0 \\ 7X_1 + 9X_2 - y = 0 \end{cases} & (۱) \\ \begin{cases} 5X_1 + 6X_2 - y \geq 0 \\ 7X_1 + 9X_2 - y \geq 0 \end{cases} & (۴) & & & \begin{cases} 5X_1 + 6X_2 - y \leq 0 \\ 7X_1 + 9X_2 - y \leq 0 \end{cases} & (۳) \end{aligned}$$

۳۸- در یک مسئله برنامه‌ریزی تولید، اگر منابع تولید، تماماً صرف تولید محصول اول شود، می‌تواند ۱۰۰ واحد از آن را تولید کند. اگر منابع مورد نیاز هر واحد محصول دوم، ثلث منبع مورد نیاز هر واحد محصول اول باشد، و  $x_j$  میزان تولید

محصول  $j$ ام تعریف شود ( $j=1,2$ )، چه محدودیتی می‌تواند معرف آن باشد؟ (بازرگانی، صنعتی ۹۰)

$$\begin{aligned} X_1 + 3X_2 &\leq 100 & (۲) & & 3X_1 + X_2 &\leq 100 & (۱) \\ 3X_1 + X_2 &\leq 300 & (۴) & & X_1 + 3X_2 &\leq 300 & (۳) \end{aligned}$$

۳۹- برنامه ریزی غیرخطی روبه‌رو را در نظر بگیرید:

(بازرگانی، صنعتی ۹۰)

$$\min Z = \frac{5x_1 + 2x_2 - 3x_3}{2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2}$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

کدام مدل، معادل آن است؟

$$\min Z = 5x_1 + 2x_2 - 3x_3$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 10 \quad (2)$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 10 \quad (1)$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\min Z = 5y_1 + 2y_2 - 3y_3$$

$$\text{s.t.} \quad y_1 + 2y_2 + 3y_3 - 10t \leq 0 \quad (3)$$

$$2y_1 + 3y_2 + y_3 + 2t = 1$$

ت‌م‌ل‌م‌ ت‌غ‌ی‌ر‌ها

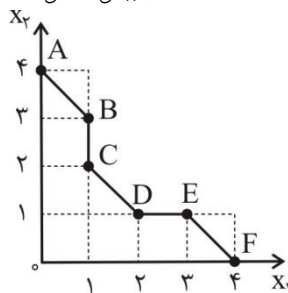
$$\max Z = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2 - (5x_1 + 2x_2 - 3x_3)$$

$$\text{s.t.} \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 10 \quad (4)$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

۴۰- فضای غیر محدب زیر را در نظر بگیرید خط CD در این فضا توسط کدام دسته محدودیت نمایش داده می‌شود؟

(بازرگانی، صنعتی ۹۲)



$$1 \leq x_1 \leq 2, \quad 1 \leq x_2 \leq 2, \quad x_1 + x_2 = 3 \quad (1)$$

$$1 \leq x_1 \leq 2, \quad 1 \leq x_2 \leq 2, \quad x_1 - x_2 = 3 \quad (2)$$

$$1 \leq x_1 \leq 2, \quad 1 \leq x_2 \leq 2, \quad x_2 - x_1 = 3 \quad (3)$$

$$1 \leq x_1 \leq 2, \quad 1 \leq x_2 \leq 2, \quad x_1 + x_2 \leq 3 \quad (4)$$

۴۱- زمین قابل کشت دو مزرعه A و B به ترتیب، ۴۰۰ و ۶۰۰ هکتار می‌باشد، که امکان کشت سه محصول در این مزارع وجود دارد. کشاورزان توافق کرده‌اند که نسبت زمین کاشته شده به زمین موجود برای مزرعه A نصف مزرعه B باشد.

(بازرگانی، صنعتی ۹۳)

محدودیت متناظر با این تصمیم کدام است؟

$$400(X_{A1} + X_{A2} + X_{A3}) - 600(X_{B1} + X_{B2} + X_{B3}) = 0 \quad (1)$$

$$600(X_{A1} + X_{A2} + X_{A3}) - 400(X_{B1} + X_{B2} + X_{B3}) = 0 \quad (2)$$

$$600(X_{A1} + X_{A2} + X_{A3}) - 800(X_{B1} + X_{B2} + X_{B3}) = 0 \quad (3)$$

$$1200(X_{A1} + X_{A2} + X_{A3}) - 400(X_{B1} + X_{B2} + X_{B3}) = 0 \quad (4)$$

۴۲- یک شرکت چوب‌بری باید سفارش‌هایی را مطابق جدول زیر تهیه و به مشتریان عرضه کند. طول الوارهای شرکت همگی استاندارد ۲۵ متری است. قطعاتی که مطابق با اندازه سفارش‌ها نباشد، ضایعات محسوب می‌شود. در صورتی که

(بازرگانی، صنعتی ۹۳)

هدف این شرکت حداقل کردن ضایعات باشد، تابع‌هدف این مسأله کدام است؟

| تعداد سفارش | اندازه (متر) |
|-------------|--------------|
| ۷۰۰         | ۷            |
| ۱۲۰۰        | ۹            |
| ۳۰۰         | ۱۰           |

$$\min Z = 6x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 4x_5 \quad (2)$$

$$\min Z = 6x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 \quad (4)$$

$$\min Z = x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 \quad (1)$$

$$\min Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \quad (3)$$

۴۳- در مسأله برنامه‌ریزی ریاضی زیر حالت یا حالت‌های خاص کدامند؟

(بازرگانی، صنعتی ۹۳)

$$\min \{ \max(|2-x|, |x-2|) \}$$

$$\text{s.t.} \quad |x| \leq 2$$

$$x \geq 0$$

(۴) تبه‌گن و بهینه چندان

(۳) بدون منطقه موجه

(۲) تبه‌گن

(۱) بهینه چندان

(بازرگانی، صنعتی ۹۳)

۴۴- در مسأله برنامه‌ریزی زیر با فرض مثبت بودن سه پارامتر  $\alpha, \beta, \gamma$  مقدار تابع هدف کدام است؟

$$\max \{ \min(\alpha\beta x_1, \beta^2 x_2) \}$$

$$\text{s.t.} \quad \alpha x_1 + \beta x_2 = \gamma$$

$$x_j \geq 0 \quad j=1,2$$

$$\frac{\gamma}{2\beta} \quad (۴)$$

$$\frac{\gamma}{2\alpha} \quad (۳)$$

$$\frac{\beta\gamma}{2} \quad (۲)$$

$$\frac{\alpha\gamma}{2} \quad (۱)$$

۴۵- کشاورزی در مزرعه خود سه محصول پنبه (۱)، جو (۲) و ذرت (۳) را کشت می‌کند. کشاورز تمایل دارد درصد زمین تخصیص یافته به کشت پنبه در مزرعه اول، حداقل ۶۰ درصد باشد. اگر  $x_{ij}$  را میزان محصول کشت شده از نوع  $i$ ام در

(بازرگانی، صنعتی ۹۴)

مزرعه  $j$ ام بدانیم. کدام مورد، خواسته کشاورز را به صورت ریاضی مدل کرده است؟

$$0/4x_{11} - 0/6x_{21} - 0/6x_{31} \leq 0 \quad (۲) \quad 0/4x_{11} - 0/6x_{21} - 0/6x_{31} \geq 0 \quad (۱)$$

$$0/6x_{11} - 0/4x_{21} - 0/4x_{31} \geq 0 \quad (۴) \quad 0/6x_{11} - 0/4x_{21} - 0/4x_{31} \leq 0 \quad (۳)$$

۴۶- برای تولید محصول A و B از دو دستگاه برش و جوش استفاده می‌شود. ظرفیت اسمی هر دستگاه و هزینه تولید با هر دستگاه به صورت زیر است؛ تابع هدف مسأله جهت تعیین تعداد بهینه تولید محصولات کدام است؟ (بازرگانی، صنعتی ۹۵)

| دستگاه | در هر ساعت ظرفیت تولید | در هر ساعت ظرفیت تولید | هزینه هر ساعت |
|--------|------------------------|------------------------|---------------|
| برش    | ۱۰                     | ۴۰                     | ۲۰            |
| جوش    | ۲۰                     | ۳۰                     | ۳۰            |

$$\min Z = 2 \cdot x_A + 3 \cdot x_B \quad (۲)$$

$$\min Z = 0/8x_A + 3x_B \quad (۱)$$

$$\min Z = 1 \cdot x_A + 4 \cdot x_B \quad (۴)$$

$$\min Z = 3/5x_A + 1/5x_B \quad (۳)$$

۴۷- یک سرمایه‌گذار امکان سرمایه‌گذاری در سه نوع سهام A، B و C به ترتیب با قیمت‌های ۱، ۲ و ۵ ریال را دارد. این سرمایه‌گذار ۱۰۰۰ ریال سرمایه خود را می‌خواهد به نحوی سرمایه‌گذاری کند که حداقل ۲۰ درصد از سرمایه‌گذاری او

(بازرگانی، صنعتی ۹۵)

در سهام نوع A باشد. محدودیت متناظر با این سیاست کدام است؟

$$0/8x_A - 0/4x_B - x_C \leq 0 \quad (۲) \quad 0/8x_A - 0/2x_B - 0/2x_C \leq 0 \quad (۱)$$

$$-0/8x_A - 0/4x_B + x_C \leq 0 \quad (۴) \quad -0/8x_A - 0/2x_B - 0/2x_C \leq 0 \quad (۳)$$

(مدیریت صنعتی ۹۶)

۴۸- مقدار بهینه تابع هدف مسأله برنامه‌ریزی زیر چند است؟

$$Z = \max \{ \min \{ y_1 + 3, 5 - 3y_2, y_3 - 6 \} \}$$

$$\text{s.t.} \quad y_1 + y_2 + y_3 = 7$$

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

$$16- \quad (۴)$$

$$-6 \quad (۳)$$

$$10 \quad (۲)$$

$$1 \quad (۱)$$

۴۹- برای تولید هر واحد محصول A از دو قطعه ۱ و ۲ به ترتیب ۵ و ۴ واحد لازم است، اگر میزان تولید محصول A در دوره برنامه‌ریزی Z و میزان خرید قطعات ۱ و ۲ به ترتیب  $x_1$  و  $x_2$  و قیمت فروش هر واحد محصول A برابر با P باشد، مدل برنامه‌ریزی خطی قطعات و تولید محصول A کدام است؟  
(مدیریت صنعتی ۹۶)

$$\max PZ - \min \left\{ \frac{x_1}{5}, \frac{x_2}{4} \right\}$$

$$\text{s.t.} \quad Z = \min \left\{ \frac{x_1}{5}, \frac{x_2}{4} \right\} \quad (2)$$

$$5x_1 + 4x_2 = Z$$

$$x_1, x_2, Z \geq 0$$

$$\max \left\{ PZ - \min \left\{ \frac{x_1}{5}, \frac{x_2}{4} \right\} \right\}$$

$$\text{s.t.} \quad Z = \max \left\{ \frac{x_1}{5}, \frac{x_2}{4} \right\} \quad (1)$$

$$5x_1 + 4x_2 = Z$$

$$x_1, x_2, Z \geq 0$$

$$\max PZ$$

$$\text{s.t.} \quad 5Z - x_1 \leq 0$$

$$4Z - x_2 \leq 0 \quad (4)$$

$$Z, x_1, x_2 \geq 0$$

$$\max PZ$$

$$\text{s.t.} \quad Z - 5x_1 \leq 0$$

$$Z - 4x_2 \leq 0 \quad (3)$$

$$Z, x_1, x_2 \geq 0$$

## پاسخنامه سؤالات چهارگزینه‌ای فصل اول

### ۱- گزینه ۱

چون منابع لازم برای تولید یک واحد محصول ۲ بوده ولی برای ۲ واحد از همان محصول ۴ نیست، فرض تناسب نقض گردیده است. فرض جمع پذیری بیانگر عدم وجود حاصل ضرب و روابط متقابل بین متغیرهاست. فرض بخش پذیری بیانگر این است که متغیرها می‌توانند به صورت اعداد اعشاری نیز باشند. فرض معین بودن بیانگر عدم وجود احتمال و قطعی بودن مدل است.

### ۲- گزینه ۴

مدل‌های ۱ و ۳ خطی بوده و مدل‌های ۲ و ۴ غیرخطی هستند. مدل ۲ غیرخطی است؛ زیرا در تابع هدف آن  $x_1$  و  $x_2$  در هم ضرب شده‌اند. مدل ۴ غیرخطی است؛ زیرا در محدودیت اول آن متغیری به توان ۲ ( $x_1^2$ ) وجود دارد. مدل ۳ برنامه ریزی خطی آرمانی است که  $d_i^+, d_i^-$  متغیرهای انحراف از آرمان و  $P$ ها اولویت‌ها را نشان می‌دهند.

### ۳- گزینه ۲

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{5}{2} \rightarrow 2x_1 = 5x_2$$

### ۴- گزینه ۲

$$\begin{aligned} 0/380x_1 + 0/001x_2 + 0/002x_3 &\geq 0/008 \times 100 \\ 0/380x_1 + 0/001x_2 + 0/002x_3 &\leq 0/012 \times 100 \end{aligned}$$

### ۵- گزینه ۲

مقدار تقاضا در دوره  $t$  - مقدار تولید در دوره  $t$  + موجودی در پایان دوره ماقبل = موجودی در پایان دوره  $t$

یعنی:

$$I_t = I_{t-1} + x_t - d_t$$

و یا:

مقدار کل تقاضا تا پایان دوره  $t$  - مقدار کل تولید تا پایان دوره  $t$  + موجودی در اول دوره = موجودی در پایان دوره  $t$

یعنی:

$$I_t = I_0 + \sum_{i=1}^t x_i - \sum_{i=1}^t d_i = I_0 + \sum_{i=1}^t (x_i - d_i)$$

### ۶- گزینه ۱

در یک مسأله موجودی  $t$  دوره‌ای، هدف به حداقل رسانیدن مجموع هزینه‌های تولید آن  $t$  دوره به علاوه مجموع هزینه‌های نگهداری ( $t-1$ ) دوره می‌باشد در نتیجه تابع هدف عبارت است از:

$$\min \sum_{t=1}^T c_t x_t + \sum_{t=1}^T h_{t-1} I_{t-1}$$

### ۷- گزینه ۱

چون هدف حداکثر کردن مقدار تولید محصولات  $A, B, (x_A, x_B)$  می‌باشد، تابع هدف به صورت زیر خواهد بود:

$$\max Z = x_A + x_B$$

### ۸- گزینه ۴

اگر محصول  $A$  بیشتر از محصول  $B$  باشد:

$$x_A - x_B \leq 6$$

و اگر محصول  $B$  بیشتر از محصول  $A$  باشد:

$$x_B - x_A \leq 6 \rightarrow x_A - x_B \geq -6$$

پس محدودیت مربوطه عبارت است از:

$$-6 \leq x_A - x_B \leq 6$$

۹- گزینه ۱)

چون می‌توان از محصول اول حداکثر تا ۲ برابر محصول دوم تولید نمود محدودیت اول به صورت زیر خواهد بود:

$$\frac{X_1}{X_2} \leq \frac{2}{1} \rightarrow X_1 \leq 2X_2 \rightarrow X_1 - 2X_2 \leq 0$$

و چون تقاضا برای محصول دوم سه برابر تقاضای محصول اول است محدودیت دوم به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{3}{1} \rightarrow X_2 = 3X_1 - X_2 = 0$$

۱۰- گزینه ۲)

در گزینه ۱ ابتدا مخرج مشترک گرفته و سپس طرفین وسطین می‌کنیم. در گزینه‌های ۲ و ۴ نیز عمل طرفین وسطین را انجام می‌دهیم. تنها گزینه‌ای که دارای محدودیت خطی است گزینه ۲ می‌باشد، زیرا در محدودیت‌های دیگر متغیرها در هم ضرب شده‌اند.

گزینه ۱:  $\frac{X_1X_2 + X_2}{X_3} \leq 2 \Rightarrow X_1X_2 + X_2 - 2X_3 \leq 0$

گزینه ۲:  $\frac{X_1 + X_2}{X_3} \geq 2 \Rightarrow X_1 + X_2 - 2X_3 \geq 0$

گزینه ۳:  $X_1X_2 + X_3 \leq 2$

گزینه ۴:  $X_1^2 + X_1X_2 \geq 2$

۱۱- گزینه ۱)

در یک مسأله برنامه‌ریزی خطی، اگر:

-  $X = 0$  باشد،  $Z$  نیز باید مساوی صفر باشد. در شکل ۲، ۳ و ۴ این رابطه وجود ندارد.

-  $X$  افزایش یابد مقدار  $Z$  نیز باید متناسب با آن افزایش پیدا کند. در شکل‌های ۳ و ۴ چنین رابطه‌ای وجود ندارد. فقط در شکل ۱ است که رابطه خطی بین  $X$  و  $Z$  وجود دارد.

۱۲- گزینه ۱)

در این مسأله چنانچه:

۱) زمان مورد نیاز برای هر واحد  $X_1$  را، ۱ در نظر بگیریم زمان مورد نیاز برای هر واحد  $X_2, X_3$  باید به ترتیب ۲ و  $\frac{1}{2}$  باشد.

۲)  $X_1 = X_2 = 0$  باشد باید  $X_3 \leq 300$  گردد.

بنابراین محدودیت مربوط به نیروی انسانی به صورت روبرو است:

$$X_1 + 2X_2 + \frac{1}{2}X_3 \leq 600$$

۱۳- گزینه ۴)

چون در این مسأله تناسب وجود ندارد برای حل آن باید از مدل برنامه‌ریزی غیرخطی استفاده نمود.

۱۴- گزینه ۱)

نسبت فروش محصول  $X_1$  به حاصل جمع دو محصول  $X_2, X_3$  باید بیشتر از  $0/6$  باشد. بنابراین:

$$\frac{X_1}{X_2 + X_3} \geq 0/6$$

$$X_1 \geq 0/6X_2 + 0/6X_3$$

$$X_1 - 0/6X_2 - 0/6X_3 \geq 0$$

۱۵- گزینه ۱)

چون تعداد چادرها حداکثر ۱۳ تا است محدودیت اول باید به صورت  $\leq 13$  نوشته شود:

$$X_A + X_B \leq 13$$

و چون ۶۴ نفر باید اسکان یابند محدودیت دوم باید به صورت مساوی نوشته شود:

$$4X_A + 8X_B = 64$$