

به نام خداوند بخشنده مهربان

تحقیق در عملیات پیشرفته

مجموعه مدیریت صنعتی

نویسنده:

مسعود معدنچی‌ها



آمادگی آزمون دکتری

سرشناسه: معدنچی‌ها، مسعود،

۱۴۰۴ عنوان و نام پدیدآور: تحقیق در عملیات پیشرفته/ نویسنده: مسعود معدنچی‌ها

مشخصات نشر: تهران: مشاوران صعود ماهان،

مشخصات ظاهری: ۳۴۹: جدول، نمودار.

شابک:

۹۷۸-۶۰۰-۴۵۸-۹۰۱-۷

وضعیت فهرست‌نویسی: فیا

فارسی - چاپ اول

موضوع: آزمون دوره‌های تحصیلات تکمیلی

موضوع: دانشگاه‌ها و مدارس عالی - ایران - آزمون‌ها

کتابخانه ملی ایران:

رده‌بندی کنگره:

رده‌بندی دیویی:



انتشارات مشاوران صعود ماهان



- ☐ نام کتاب: تحقیق در عملیات پیشرفته
- ☐ مدیران مسئول: مجید و هادی ستیاری
- ☐ نویسنده: مسعود معدنچی‌ها
- ☐ مدیر تولید محتوا: سمیه بیگی
- ☐ ناشر: مشاوران صعود ماهان
- ☐ نوبت و تاریخ چاپ: اول/ ۱۴۰۴
- ☐ تیراژ: ۱۰۰۰ نسخه
- ☐ قیمت: ۵/۶۱۰/۰۰۰ ریال
- ☐ شابک: ۹۷۸-۶۰۰-۴۵۸-۹۰۱-۷

انتشارات مشاوران صعود ماهان: تهران، خیابان ولیعصر، بالاتر از تقاطع ولیعصر - مطهری، پلاک ۲۰۵۰

تلفن: ۸۸۱۰۰۱۱۳ و ۸۸۴۰۱۳۱۳

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به مؤسسه آموزش عالی آزاد ماهان می‌باشد و هرگونه اقتباس و کپی‌برداری از این اثر بدون اخذ مجوز پیگرد قانونی دارد.

مقدمه ناشر

به نام خدا

ایمان داریم که هر تغییر و تحول بزرگی در مسیر زندگی بدون تحول معرفت و نگرش میسر نخواهد بود. پس بیایید با اندیشه توکل، تفکر، تلاش و تحمل در توسعه دنیای فکریمان برای نیل به آرامش و آسایش توأمان اولین گام را برداریم. چون همگی یقین داریم دانایی، توانایی می‌آورد.

شاد باشید و دلی را شاد کنید

برادران سیاری

مقدمه مولف

دامنه بحث تحقیق در عملیات آنچنان گسترده شده که هرچه زمان بیشتر پیش می‌رود، نکات و مفاهیم جدیدی بر آن افزوده می‌شود. سری کتاب‌های مرجع آمادگی کنکور دکتری موسسه آموزش عالی آزاد ماهان که در اختیار شما عزیزان قرار می‌گیرد حاصل تلاش گروهی از اساتید برجسته و فارغ‌التحصیلان برتر دانشگاه‌های معتبر کشور می‌باشد که تمامی نکات و مفاهیم را در این کتاب جمع‌آوری کرده‌اند.

درس پژوهش عملیاتی در کنکور دکتری مدیریت به عنوان یکی از دروس استراتژیک و رتبه‌ساز به حساب می‌آید و با توجه به اینکه درصد میانگین کشوری این درس بسیار پایین می‌باشد دانشجویانی که بتوانند روی این درس سرمایه‌گذاری کنند و درصد قابل توجهی از این درس را در کنکور کسب کنند نیمی از راه قبولی در کنکور ارشد را گذرانده‌اند.

درس تحقیق در عملیات با توجه به اینکه حالت مفهومی - تحلیلی - محاسباتی دارد، باید به صورتی آموزش داده شود که دانشجو به موضوع اصلی درس پی برده و از حالت مبهمی که هنگام مطالعه برایش ایجاد می‌گردد خارج شود. در این کتاب سعی بر آن شده است که تمامی مطالب و نکات اصلی کنکور به صورت خودآموز و نحوه نگارش آن به صورت ساده روان بیان گردد که تمامی دانشجویان (مدیریتی و غیرمدیریتی) هیچ مشکلی در مطالعه نداشته باشند.

در میان تمام فعالیت‌ها ارائه موثرترین خدمت بی‌ریا همراه با عشق‌ورزی بی‌توقع و پرهیزگاری کامل به نیازمندترین افراد مهم‌ترین کار است. افتخار چنین خدمتی می‌تواند نصیب هر فردی بشود.

مسعود معدنچی‌ها

فهرست مطالب

فصل اول - برنامه‌ریزی خطی	۵
فصل دوم - تکنیک‌های متغیرهای حددار	۳۸
فصل سوم - برنامه‌ریزی کنترل خطی	۶۷
فصل چهارم - مسائل بزرگ مقیاس چندبخشی	۹۳
فصل پنجم - برنامه‌ریزی پویا	۱۵۹
فصل ششم - تصمیم‌گیری چندهدفه	۲۳۲
فصل هفتم - برنامه‌ریزی استوار	۲۸۹
فصل هشتم - روش‌های حل غیرسیمپلکسی	۳۰۸
سوالات و پاسخ تشریحی کنکور سراسری ۱۴۰۰	۳۳۴
سوالات و پاسخ تشریحی کنکور سراسری ۱۴۰۱	۳۴۱

فصل اول

برنامه ریزی خطی

برنامه ریزی خطی^۱

برنامه ریزی خطی یک تکنیک ریاضی در جهت بهترین استفاده از منابع محدود سازمان می باشد منابع موجود در سازمان مانند مواد اولیه، نیروی کار، سرمایه، زمان، ظرفیت ماشین آلات، فضا و غیره محدود می باشند توسط تکنیک برنامه ریزی خطی می توان منابع محدود را طوری به فعالیت های مختلف تخصیص داد که راه حل بهینه مثلاً حداکثر سود یا حداقل هزینه حاصل شود.

هر مدل برنامه ریزی خطی دارای یک تابع هدف^۲ و تعدادی محدودیت^۳ می باشد. شکل کلی یک مدل برنامه ریزی خطی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} (\text{Max یا Min}) Z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ \text{Subject to: } & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n (\leq \text{یا} \geq \text{یا} =) b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n (\leq \text{یا} \geq \text{یا} =) b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n (\leq \text{یا} \geq \text{یا} =) b_m \\ & x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \end{aligned}$$

که به اختصار به صورت زیر نوشته می شود:

$$\begin{aligned} (\text{Max یا Min}) Z &= \sum_{j=1}^n c_j x_j \\ \text{s.t: } & \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j (\leq \text{یا} \geq \text{یا} =) b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \\ & x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

تابع Z را تابع هدف می گویند که هدف را نشان می دهد و می تواند به صورت حداکثر کردن و یا حداقل کردن باشد. اگر هدف حداکثر کردن باشد $\text{Max} Z$ و اگر هدف حداقل کردن باشد $\text{Min} Z$ نوشته می شود.

توابع دیگر محدودیت ها هستند که منابع، امکانات، شرایط و نیازها را نشان می دهند. تعداد m محدودیت اول را محدودیت های کارکردی می نامند که می توانند به صورت $(=)$ یا $(\geq)$ و یا $(\leq)$ باشند. محدودیت های $x_j \geq 0$ را

¹ Linear Programming (LP)

² Objective Function

³ Constraint

محدودیت‌های منفی می‌گویند. البته در بعضی از مسائل ممکن است متغیر یا متغیرهایی بتوانند مقادیر منفی نیز داشته باشند یعنی آزاد در علامت باشند که در این صورت به جای آنها از تفاضل دو متغیر نامنفی استفاده می‌کنیم.

x_j ها را متغیرهای تصمیم، c_j ها، b_i ها و a_{ij} را پارامترهای مدل می‌نامند (اندیس i نشان دهنده شماره محدودیت و اندیس j نشان دهنده شماره متغیر تصمیم است).

c_j ها (اعداد سمت راست محدودیت‌ها) معمولاً سود یا زیان یک واحد از فعالیت‌ها را نشان می‌دهند.

b_i ها (اعداد سمت راست محدودیت‌ها) نشان دهنده منابع، امکانات و نیازها هستند مانند میزان مواد اولیه، ظرفیت ماشین‌آلات و غیره.

a_{ij} ها (ضرایب متغیرها در محدودیت‌ها) که ضرایب فنی یا تکنولوژی نامیده می‌شوند نشان دهنده مقداری از منبع i هستند که برای هر واحد از فعالیت j لازم است.

حل مسائل برنامه‌ریزی خطی

مسائل برنامه‌ریزی خطی را می‌توان با روش ترسیمی^۱ و یا روش سیمپلکس حل نمود. روش ترسیمی فقط در حل مسائل دو متغیره کاربرد دارد. لذا در حل مسائل واقعی که تعداد متغیرها بیشتر از ۲ تا هستند از روش سیمپلکس استفاده می‌شود. باید گفت حل مسائل بزرگ با دست امکان‌پذیر است. نرم‌افزارهای بسیاری برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی وجود دارند که تعدادی از آنها به قرار زیر هستند^۲:

WinQSB , LINDO , LINGO , GINO , GAMS , TORA , STORM , DS , MS , ABQM , Micro Computer , LINPROG

نحوه استفاده از نرم‌افزارهای WinQSB و LINGO در فصل آخر کتاب شرح داده شده است.

روش سیمپلکس

روش سیمپلکس در سال ۱۹۴۷ توسط جورج دانتزیگ^۳ ارائه گردید. به وسیله این روش می‌توان مسائل برنامه‌ریزی خطی با هر تعداد متغیر را حل نمود.

گام‌های لازم در روش سیمپلکس به قرار زیر هستند:

گام ۱- استاندارد کردن مسأله

گام ۲- تشکیل اولین جدول

گام ۳- تکرار جدول تا زمانیکه جدول نهایی حاصل شود.

این گام‌ها در ادامه شرح داده می‌شوند:

گام ۱- استاندارد کردن مسأله

برای استاندارد کردن مسأله چنانچه:

۱- محدودیت به صورت $\leq$ باشد به سمت چپ آن یک متغیر کمی اضافه کنید.

۲- محدودیت به صورت $\geq$ باشد از سمت چپ آن یک متغیر کمی کم کرده و یک متغیر مصنوعی اضافه نمایید.

۳- محدودیت به صورت $=$ باشد به سمت چپ آن یک متغیر مصنوعی اضافه نمایید.

^۱ برای مطالعه روش ترسیمی می‌توانید به [۸] مراجعه کنید.

^۲ برای آشنایی با نرم‌افزارهای LINDO و TORA می‌توانید به [۸] مراجعه کنید.

^۳ George Dantzig

متغیر کمکی با S و متغیر مصنوعی با A نشان داده می شود^۱:

محدودیت	شکل استاندارد محدودیت
$2x_1 + 5x_2 \leq 60$	$2x_1 + 5x_2 + S_1 = 60$
$4x_1 + x_2 \geq 10$	$4x_1 + x_2 - S_2 + A_1 = 10$
$3x_1 + 2x_2 = 30$	$3x_1 + 2x_2 + A_2 = 30$
تابع محدودیت	شکل استاندارد تابع هدف
$\text{Max} Z = 6x_1 + 5x_2$	$\text{Max} Z - 6x_1 - 5x_2 = 0$

موقع استاندارد کردن مسأله در تابع هدف، متغیرها را به طرف چپ می بریم:

گام ۲- تشکیل اولین جدول

اولین جدول سیمپلکس یک جواب پایه ای موجه^۲ است که نشان دهنده ی مبدأ مختصات می باشد. برای تشکیل اولین جدول سیمپلکس کلیه متغیرها را در بالای جدول بنویسید. در زیر آنها تابع هدف و سپس محدودیت ها را وارد نمایید. اگر تمام محدودیت ها به صورت $\leq$ باشند اولین جدول به قرار زیر خواهد بود.

پایه	x_1	$x_2 \dots \dots \dots x_n$	S_1	$S_2 \dots \dots \dots S_m$	RHS*
Z					
S_1			محدودیت ۱		
S_2			محدودیت ۲		
$\vdots$					
S_m			محدودیت m		

متغیرهایی که در ستون پایه بعد از Z نوشته می شوند متغیرهای پایه یا اساسی نامیده می شوند. تعداد متغیرهای پایه به تعداد محدودیت های مسأله است و مقدار آنها مساوی عدد مقابل خود در سمت راست جدول می باشد. باید توجه شود که در تمام جدول های سیمپلکس ستون مربوط به متغیرهای پایه، بردار یکه باشد ینی ضریب یک متغیر پایه در سطر خود مساوی ۱ و رد سطرهای دیگر مساوی صفر باشد.

متغیرهایی که در ستون پایه نوشته نمی شوند متغیرهای غیر پایه نام دارند و مقدار آنها مساوی صفر است.

گام ۳- تکرار جدول

برای تکرار جدول باید متغیر ورودی و متغیر خروجی تعیین شده و در جدول بعدی متغیر ورودی به جای متغیر خروجی نوشته شود. تکرار جدول در یک مسأله باید به قدری انجام گیرد که جدول بهینه حاصل شود.

شرایط جدول بهینه

جدولی که جواب بهینه را نشان می دهد باید دارای دو شرط زیر باشد:

۱- شرط بهینه بودن

۲- شرط موجه بودن

^۱ بعضی از مؤلفین متغیر مصنوعی را با R نشان داده اند.

^۲ منظور از جواب پایه ای، جواب گوشه از منظور از جواب پایه ای موجه، جواب گوشه ای است که در داخل منطقه موجه می باشد.

* به جای نوشتن اعداد سمت راست در قسمت بالای سمت راست جدول می توان از RHS (Right hand side) استفاده نمود.

شرط بهینه بودن این است که تمام اعداد سطر Z یعنی $(Z_j - C_j)$ ها در یک مسأله Max، صفر یا مثبت و در یک مسأله Min صفر یا منفی باشند.

شرط موجه بودن این است که اعداد سمت راست جدول یعنی $B^{-1}b$ صفر یا مثبت باشند:

شرایط جدول بهینه	مسایل Max	مسایل Min
شرط بهینه بودن	$(Z_j - C_j) \geq 0$	$(Z_j - C_j) \leq 0$
شرط موجه بودن	$B^{-1}b \geq 0$	$B^{-1}b \geq 0$

شرایط جدول بهینه در مسایل Max و Min

روش سیمپلکس معمولی (سیمپلکس اولیه)، در حل مسائلی به کار می‌رود که دارای شرط موجه بودن باشند. در تمام تکرارهای این روش جدول موجه باقی می‌ماند یعنی اعداد سمت راست آن منفی نمی‌شود. به مثال ۱ توجه کنید:
مثال ۱:

$$\text{Max} Z = 8x_1 + 5x_2$$

$$\text{s.t: } 2x_1 + x_2 \leq 20$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

چون محدودیت‌ها به صورت $\leq$ هستند با استفاده از متغیرهای کمی S_1 و S_2 ، آنها را به صورت مساوی می‌نویسیم.

$$\text{Max} Z - 8x_1 - 5x_2 = 0$$

$$\text{s.t: } 2x_1 + x_2 + S_1 = 20$$

$$x_1 + 3x_2 + S_2 = 40$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0$$

اولین جدول سیمپلکس به قرار زیر است:

	پایه	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS	نسبت سطرها
	Z	-8	-5	0	0	0	
جدول ۱	S_1	2	1	1	0	20	$20 \div 2 = 10$
	S_2	1	3	0	1	40	$40 \div 1 = 40$

چون در سطر Z عدد منفی وجود دارد این جدول بهینه نیست و باید تکرار گردد. برای تکرار جدول باید متغیر ورودی و خروجی تعیین شود.

تعیین متغیر ورودی

در مسائل Max منفی‌ترین و در مسائل Min مثبت‌ترین عدد سطر Z متغیر ورودی را نشان می‌دهد. در این مسأله x_1 را به عنوان متغیر ورودی انتخاب می‌کنیم. ستون x_1 را ستون ورودی و یا ستون لولا می‌نامند.

تعیین متغیر خروجی

در روش سیمپلکس اولیه عدد لولا حتماً باید مثبت باشد. بنابراین اعداد سمت راست جدول را بر اعداد مثبت ستون ورودی تقسیم می‌کنیم و کوچک‌ترین نسبت را برای تعیین متغیر خروجی انتخاب می‌کنیم.^۱ در این مسأله نسبت سطر اول ۱۰ و نسبت سطر دوم ۴۰ است بنابراین سطر اول یعنی سطر S_1 را به عنوان سطر خروجی و متغیر S_1 را به عنوان متغیر خروجی

^۱ این مثال در فصل آخر کتاب، هم با استفاده از نرم‌افزار winQSB (مثال ۱) و هم با استفاده از نرم‌افزار LINGO (مثال ۶) حل شده است.

^۲ انتخاب کوچک‌ترین نسبت سطرها در تعیین متغیر خروجی بهخ این علت است که در جدول بعدی اعداد سمت راست جدول منفی نشود (جدول موجه باقی بماند).

انتخاب می‌کنیم. سطر خروجی را سطر لولا نیز می‌نامند. عدد ۲ که در تقاطع ستون لولا و سطر لولا است عدد لولا نامیده می‌شود.

انجام تکرار

در جدول بعدی متغیر رخروجی S_1 را از پایه خارج می‌کنیم و به جای آن متغیر ورودی X_1 را می‌نویسیم. این جدول باید طوری نوشته شود که ستون متغیر پایه X_1 به بردار یک تبدیل شود. یعنی عدد لولا به یک و بقیه اعداد ستون لولا به صفر تبدیل شوند.

در جدول جدید ابتدا سطر لولای جدید را طوری می‌نویسیم که عدد لولا مساوی ۱ شود بنابراین برای نوشتن سطر لولای جدید تمام اعداد سطر لولای قدیم را تقسیم بر عدد لولا می‌کنیم:

$$\text{سطر لولای قدیم} = \frac{\text{سطر لولای جدید}}{\text{عدد لولا}}$$

چون در جدول ۱ عدد لولا ۲ است تمام اعداد سطر لولا را تقسیم بر ۲ می‌کنیم تا سطر لولای جدید به دست آید:

$$[1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad 0 \quad 10] = \text{سطر لولای جدید (سطر } X_1)$$

سطرهای دیگر با استفاده از فرمول زیر نوشته می‌شوند:

$$\text{سطر قدیم} + (\text{سطر لولای جدید}) (\text{قرینه ضریب ستون لولا}) = \text{سطر جدید}$$

ضریب ستون لولا در هر سطر به عددی گفته می‌شود که در ستون لولا قرار دارد.

با توجه به فرمول فوق می‌توانیم برای به دست آوردن هر سطر جدید، سطر قدیم آن را در بالا و سطر لولای جدید را در زیر آن بنویسیم سپس قرینه عددی را که در بالای عدد لولا قرار دارد (یعنی قرینه ضریب ستون لولا را) در سطر پایین (سطر لولای جدید) ضرب کنیم و به سطر بالا (سطر قدیم) اضافه نماییم.

سطر Z جدید: برای محاسبه سطر Z جدید، سطر لولای جدید را در ۸ (قرینه عددی که در بالای عدد لولا قرار دارد) ضرب نموده و به سطر Z قدیم اضافه می‌نماییم:

سطر Z قدیم +	-۸	-۵	۰	۰	۰
سطر لولای جدید $\times (۸)$	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	۱۰
سطر Z جدید	۰	-۱	۴	۰	۸۰

سطر S_7 جدید: برای محاسبه سطر S_7 جدید، سطر لولای جدید را در (-۱) ضرب و به سطر Z قدیم اضافه می‌نماییم:

سطر S_7 قدیم +	۱	۳	۰	۱	۴۰
سطر لولای جدید $\times (-۱)$	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	۱۰
سطر S_7 جدید	۰	$\frac{۵}{۲}$	$\frac{-۱}{۲}$	۱	۳۰

بنابراین جدول ۲ (یا تکرار ۱) به قرار زیر می‌باشد:

پایه	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS	نسبت سطرها
Z	۰	-۱	۴	۰	۸۰	
جدول ۲ x_1	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	۱۰	$10 \div \frac{1}{2} = 20$
S_2	۰	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	۱	۳۰	$30 \div \frac{5}{2} = 12$

جدول ۲ بهینه نیست زیرا در سطر Z عدد منفی وجود دارد. بنابراین x_2 را به عنوان متغیر ورودی و S_2 را به عنوان متغیر خروجی انتخاب می‌کنیم چون عدد لولا $\frac{5}{2}$ است تمام اعداد سطر لولا را تقسیم بر $\frac{5}{2}$ می‌کنیم تا سطر لولای جدید به دست آید:

$$[0 \quad 1 \quad -\frac{1}{5} \quad \frac{2}{5} \quad 12] = \text{سطر لولای جدید (سطر } x_2)$$

سطر Z و x_1 نیز به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

سطر Z قدیم + سطر لولای جدید $\times (-1)$	۰	-۱	۴	۰	۸۰
	۰	۱	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	۱۲
			$\frac{5}{5}$	$\frac{5}{5}$	
سطر Z جدید	۰	۰	$\frac{19}{5}$	$\frac{2}{5}$	۹۲
			$\frac{5}{5}$	$\frac{5}{5}$	

سطر x_1 قدیم + سطر لولای جدید $\times (-\frac{1}{2})$	۱	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	۰	۱۰
	۰	۱	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	۱۲
			$\frac{5}{5}$	$\frac{5}{5}$	
سطر x_1 جدید	۱	۰	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	۴
			$\frac{5}{5}$	$\frac{5}{5}$	

بنابراین جدول ۳ به قرار زیر است:

پایه	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS	
Z	۰	۰	$\frac{19}{5}$	$\frac{2}{5}$	۹۲	
			$\frac{5}{5}$	$\frac{5}{5}$		
جدول ۳ x_1	۱	۰	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	۴	
			$\frac{5}{5}$	$\frac{5}{5}$		
x_2	۰	۱	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	۱۲	جدول نهایی
			$\frac{5}{5}$	$\frac{5}{5}$		

جدول ۳ جدول نهایی است زیرا در سطر Z آن عدد منفی وجود ندارد. جواب بهینه مسأله به قرار زیر است:

$$x_1^* = 4, \quad x_2^* = 12, \quad S_1^* = 0, \quad S_2^* = 0, \quad Z^* = 92$$

حل مسائلی که به صورت Min (حداقل کردن) هستند

حل مسائل Max و Min در دو مورد زیر با هم متفاوت هستند:

۱- در مسائل Max، زمانی جواب بهینه به دست می آید که کلیه ضرایب سطر Z صفر یا مثبت باشند ولی در مسائل Min، زمانی جواب بهینه به دست می آید که کلیه ضرایب سطر Z صفر یا منفی باشند.

۲- در مسائل Max، منفی ترین ضریب سطر Z برای انتخاب متغیر ورودی در نظر گرفته می شود در صورتیکه در مسائل Min، مثبت ترین ضریب سطر Z نشان دهنده متغیر ورودی است.

تعیین متغیر خروجی و تکرار جدول در مسائل Max و Min یکسان است.

مثال ۲:

$$\text{Min } Z = 3x_1 - 5x_2$$

$$\text{s.t: } x_1 + x_2 \leq 6$$

$$-x_1 + x_2 \leq 4$$

$$4x_1 - x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\text{Min } Z - 3x_1 + 5x_2 = 0$$

$$\text{s.t: } x_1 + x_2 + S_1 = 6$$

$$-x_1 + x_2 + S_2 = 4$$

$$4x_1 - x_2 + S_3 = 8$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

حل:

پایه	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	جواب	نسبت ها
Z	-3	5	0	0	0	0	
تکرار صفر	S_1	1	1	0	0	6	$6 \div 1 = 6$
	S_2	-1	1	0	1	4	$4 \div 1 = 4$
	S_3	4	-1	0	1	8	—
تکرار ۱	Z	2	0	0	-5	-20	
	S_1	2	0	1	-1	2	$2 \div 2 = 1$
	x_2	-1	1	0	1	4	—
	S_3	3	0	0	1	12	$12 \div 3 = 4$
تکرار ۲	Z	0	0	-1	-4	-22	
	x_1	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	
	x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	5	جدول نهایی
	S_3	0	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	9	
				$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$		

توجه: می توان در مثال ۲، با ضرب کردن تابع هدف در (-)، تابع هدف Min را به Max تبدیل و حل نمود.

حل مسائلی که دارای محدودیت‌هایی به صورت $\geq$ و یا $=$ هستند

محدودیت‌های $\geq$ و یا $=$ باعث می‌شوند که مبدأ مختصات خارج از نقطه موجود قرار گیرد و نتوان از آن به عنوان یک جواب پایه‌ای موجه استفاده نمود. در این گونه مسائل برای این که بتوان از مبدأ مختصات به عنوان اولین جواب پایه‌ای استفاده گردد از متغیرهای مصنوعی (ساختگی) به صورت زیر استفاده می‌شود:

محدودیت	شکل استاندارد محدودیت
$x_1 + x_2 \geq 5$	$\rightarrow x_1 + x_2 - S_1 + A_1 = 5$
$2x_1 + x_2 = 8$	$\rightarrow 2x_1 + x_2 + A_2 = 8$

تا زمانی که مقدار تمام متغیرهای مصنوعی صفر نگردند جواب موجه برای مسأله اصلی به دست نمی‌آید. لذا به منظور صفر شدن متغیرهای مصنوعی، در حل این گونه مسائل از روش M بزرگ یا دو مرحله‌ای استفاده می‌شود. در ادامه روش M بزرگ شرح داده می‌شود.

روش M بزرگ^۱ یا روش جریمه

روش M بزرگ توسط چارلز و کوپر^۲ توسعه یافته است. در این روش برای تضمین صفر شدن متغیرهای مصنوعی، جریمه بزرگی^۳ معادل M به آنها نسبت داده و $-MA$ را در مسائل Max و $+MA$ را در مسائل Min به سمت راست تابع هدف اضافه می‌کنیم. برای بهینه شدن Z ، باید عدد بسیار بزرگ MA که در مسائل Max از سمت راست تابع هدف کسر و در مسائل Min به سمت راست تابع هدف اضافه می‌شود صفر گردد. بنابراین چون M ، صفر نیست حتماً A ها صفر خواهند شد (البته در صورتیکه مسأله جواب موجه داشته باشد).

اضافه کردن متغیرهای مصنوعی به محدودیت‌های $\geq$ و یا $=$ یک حيله ریاضی برای به دست آوردن اولین جواب پایه‌ای و اضافه کردن $-MA$ در مسائل Max و $+MA$ در مسائل Min به تابع هدف، برای صفر شدن A و به دست آوردن جواب بهینه در داخل منطقه موجه است. در روش M بزرگ از محدودیت‌های $\leq$ ، متغیر کمکی و از محدودیت‌های $\geq$ و $=$ ، متغیر مصنوعی را رد ستون پایه اولین جدول می‌نویسیم. چون در اولین جدول ضرایب A ها در سطر Z صفر نیست یعنی جدول یک بهینه نمی‌باشد به منظور اصلاح جدول، سطرهای A را با هم جمع می‌کنیم و بعد از ضرب کردن به $-M$ در مسائل Max (یا $+M$ در مسائل Min)، به سطر Z اضافه می‌نماییم. سپس تا رسیدن به جدول نهایی آن را تکرار می‌کنیم.

◀ مثال ۳:

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= 2x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t: } & 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ & x_1 + x_2 \geq 5 \\ & -3x_1 + x_2 = 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

حل:

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= 2x_1 + 4x_2 + MA_1 + MA_2 \rightarrow \text{Min } Z - 2x_1 - 4x_2 - MA_1 - MA_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + S_1 &= 8 \\ x_1 + x_2 - S_2 + A_1 &= 5 \\ -3x_1 + x_2 + A_2 &= 3 \\ x_1, x_2 + S_1, S_2, A_1, A_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

¹ Big M Method

² Charnes and Cooper

^۳ M عدد بسیار بزرگ و مثبت است. M باید آن قدر بزرگ باشد که متغیر مصنوعی وارد پایه نشود.

از اولین محدودیت S_1 و از محدودیت‌های دوم و سوم به ترتیب A_2 و A_3 را رد ستون پایه اولین جدول می‌نویسیم:

پایه	x_1	x_2	S_1	S_2	A_2	A_3	جواب
Z	-۲	-۴	۰	۰	-M	-M	۰
S_1	۲	۱	۱	۰	۰	۰	۸
A_2	۱	۱	۰	-۱	۱	۰	۵
A_3	-۳	۱	۰	۰	۰	۱	۳

برای یک‌شدن جدول، سطرهای A_2 و A_3 را با هم جمع، در M ضرب و به سطر Z اضافه می‌کنیم. سپس تا رسیدن به جدول نهایی آن را تکرار می‌نماییم:

پایه	x_1	x_2	S_1	S_2	A_2	A_3	جواب
Z	$-۲M-۲$	$۲M-۴$	۰	-M	۰	۰	$۸M$
S_1	۲	۱	۱	۰	۰	۰	۸
A_2	۱	۱	۰	-۱	۱	۰	۵
A_3	-۳	۱	۰	۰	۰	۱	۳
Z	$۴M-۱۴$	۰	۰	-M	۰	$-۲M+۴$	$۲M+۱۲$
S_1	۵	۰	۱	۰	۰	-۱	۵
A_2	۴	۰	۰	-۱	۱	-۱	۲
x_2	-۳	۱	۰	۰	۰	۱	۳

پایه	x_1	x_2	S_1	S_2	A_2	A_3	جواب
Z	۰	۰	۰	$-\frac{۷}{۲}$	$+M+\frac{۷}{۲}$	$-M+\frac{۱}{۲}$	۱۹
S_1	۰	۰	۱	$\frac{۵}{۴}$	$-\frac{۵}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۵}{۲}$
x_1	۱	۰	۰	$-\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	$-\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$
x_2	۰	۱	۰	$-\frac{۳}{۴}$	$\frac{۳}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۹}{۲}$

به‌طوریکه ملاحظه می‌شود در جدول نهایی متغیرهای مصنوعی در پایه نیستند یعنی مقدار آنها صفر است بنابراین مسأله دارای جواب بهینه به قرار زیر می‌باشد:

$$x_1^* = \frac{1}{2}, \quad x_2^* = \frac{9}{2}, \quad S_1^* = \frac{5}{2}, \quad S_2^* = 0, \quad Z^* = 19$$

روش سیمپلکس ثانویه^۱

این روش که اولین بار توسط لیمک^۲ معرفی شده است در حل مسائلی به کار می‌رود که شرط بهینه بودن را دارند ولی غیر موجه می‌باشند. در این روش:

۱- کلیه محدودیت‌ها را به $\leq$ تبدیل نمایید^۳.

۲- با استفاده از متغیرهای کمکی به عنوان متغیرهای پایه، اولین جدول را بنویسید.

۳- متغیری را که دارای منفی‌ترین مقدار است به عنوان متغیر خروجی انتخاب نمایید. به عبارت دیگر منفی‌ترین عدد سمت راست جدول را برای تعیین سطر خروجی در نظر بگیرید.

۴- اعداد سطر Z را بر اعداد منفی سطر خروجی تقسیم کنید و کوچک‌ترین قدر مطلق را برای تعیین متغیر ورودی انتخاب نمایید^۴. در صورتیکه در سطر خرنجی عدد منفی نباشد مسأله بدون جواب موجه است^۵.

مانند روش سیمپلکس اولیه در روش سیمپلکس ثانویه نیز هرگاه بیش از یک متغیر ورودی یا متغیر خروجی موجود باشند یکی از آنها را به دلخواه انتخاب نمایید.

۵- تکرار جدول را که مانند روش سیمپلکس اولیه است آن قدر انجام دهید تا جدول موجه شود یعنی در سمت راست جدول عدد منفی موجود نباشد.

◀ مثال ۴:

$$\text{Min } Z = 4x_1 + 7x_2$$

$$x_1 + x_2 \geq 6$$

$$2x_1 + 3x_2 \geq 12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

مسأله شرط بهینه بودن را دارد بنابراین می‌توان آن را با استفاده از روش سیمپلکس ثانویه حل نمود. ابتدا محدودیت‌ها را به $\leq$ تبدیل می‌کنیم:

$$\text{Min } Z = 4x_1 + 7x_2$$

$$-x_1 - x_2 \leq -6$$

$$-2x_1 - 3x_2 \leq -12$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\text{Min } Z - 4x_1 - 7x_2 = 0$$

$$-x_1 - x_2 + S_1 = -6$$

$$-2x_1 - 3x_2 + S_2 = -12$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0$$

پایه	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS
Z	-4	-7	0	0	0
جدول ۱ S_1	-1	-1	1	0	-6
S_2	-2	-3	0	1	-12

سطر خروجی

¹ Dual simplex Method

² Lemke

^۳ در این روش محدودیت‌ها به $\leq$ تبدیل می‌شوند تا نیازی به متغیر مصنوعی نباشد. محدودیت‌های مساوی را می‌توان با دو نامعادله جایگزین نمود.

^۴ به جای کوچک‌ترین قدر مطلق (یا نزدیک‌ترین عدد به صفر)، می‌توان گفت در مسائل Max بزرگ‌ترین و در مسائل Min کوچک‌ترین نسبت را برای تعیین متغیر ورودی انتخاب نمایید.

^۵ عدد لولا در این روش باید منفی باشد.

سطر دوم را به عنوان سطر خروجی در نظر می‌گیریم زیرا دارای منفی‌ترین عدد سمت راست است. برای تعیین متغیر ورودی نیز اعداد سطر Z را بر اعداد منفی سطر خروجی تقسیم می‌کنیم و از این قدر مطلق جواب‌ها کوچک‌ترین را انتخاب می‌نماییم:

$$x_1 \rightarrow \left| \frac{-4}{-2} \right| = 2 \rightarrow \text{متغیر ورودی}$$

$$x_2 \rightarrow \left| \frac{-7}{-3} \right| = 2/3$$

جدول بعدی به قرار زیر است:

پایه	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS
Z	۰	-۱	۰	-۲	۲۴
جدول ۲ S_1	۰	$\frac{1}{2}$	۱	$-\frac{1}{2}$	۰
		$\frac{2}{2}$		$\frac{2}{2}$	
x_1	۱	$\frac{3}{2}$	۰	$-\frac{1}{2}$	۶
		$\frac{2}{2}$		$\frac{2}{2}$	

جدول نهایی

جواب بهینه:

$$x_1^* = 6, x_2^* = 0, S_1^* = 0, S_2^* = 0, Z^* = 24$$

چون در جدول نهایی مقدار متغیر پایه S_1 مساوی صفر است مسأله دارای حالت بهینه تبهگن یا تبهگن دائم می‌باشد.

تفاوت روش سیمپلکس اولیه و ثانویه

- ۱- در روش سیمپلکس اولیه ابتدا متغیر ورودی و سپس متغیر خروجی انتخاب می‌شوند در صورتیکه در روش سیمپلکس ثانویه ابتدا متغیر خروجی و سپس متغیر ورودی انتخاب می‌گردند.
- ۲- در روش سیمپلکس اولیه عدد لولا حتماً مثبت است در صورتیکه در روش سیمپلکس ثانویه عدد لولا حتماً منفی است.
- ۳- هر دو روش سیمپلکس اولیه و ثانویه از مبدأ مختصات شروع می‌کنند ولی روش سیمپلکس اولیه در هر تکرار یکی از گوشه‌های موجه مجاور را بررسی می‌کند تا جواب موجه و بهینه حاصل شود.
- ۴- در هر تکرار روش سیمپلکس اولیه، مقدار Z بهتر می‌شود در صورتیکه در هر تکرار روش سیمپلکس ثانویه، مقدار Z بدتر می‌شود (مگر در حالت خاص تبهگن که ممکن است مقدار Z تغییر نکند).

حل مسائل غیر بهینه و غیر موجه

مسائلی را که هم غیر بهینه و هم غیر موجه هستند می‌توان با استفاده از روش‌های کارآی زیر حل نمود:

- ۱- روش محدودیت مصنوعی^۱
 - ۲- روش سیمپلکس اولیه - ثانویه
- این روش‌ها نسبت به روش M بزرگ و روش دو مرحله‌ای^۲ دارای مزایای زیر هستند:
- ۱- نیازی به اضافه کردن متغیر مصنوعی ندارند.
 - ۲- با تعداد تکرارهای کمتری به جواب بهینه می‌رسند.

^۱ به روش محدودیت مصنوعی که بر مبنای روش سیمپلکس ثانویه توسعه یافته است روش سیمپلکس ثانویه توسعه یافته نیز می‌گویند.

^۲ برای مطالعه روش دو مرحله‌ای می‌توانید به [۸] مراجعه کنید.

روش محدودیت مصنوعی^۱

در این روش ابتدا با اضافه کردن یک محدودیت مصنوعی، مسأله را از حالت غیر بهینه خارج می‌کنیم و سپس مسأله بهینه و غیر موجه به دست آمده را با استفاده از روش سیمپلکس ثانویه حل می‌کنیم:

گام‌های لازم در روش محدودیت مصنوعی به قرار زیر هستند:

گام ۱- تابع هدف را به Max و محدودیت‌ها را به $\leq$ تبدیل نماییم.

گام ۲- با استفاده از متغیرهایی که ضریب آنها در تابع هدف مثبت است^۲ محدودیت جدیدی بنویسید. بدین ترتیب که مجموع این متغیرها را کوچک‌تر مساوی M قرار دهید. این محدودیت جدید که محدودیت زائدی است محدودیت مصنوعی نامیده می‌شود.

گام ۳- به وسیله متغیرهای کمی محدودیت‌ها را به صورت مساوی بنویسید و اولین جدول سیمپلکس را تشکیل دهید. در این جدول متغیری را که دارای منفی‌ترین ضریب در سطر Z است به عنوان متغیر ورودی و سطر مربوط به محدودیت مصنوعی را به عنوان سطر خروجی در نظر بگیرید و جدول را تکرار کنید.

گام ۴- بعد از یک تکرار، جدول بهینه و غیر موجه است. لذا با استفاده از روش سیمپلکس ثانویه تا رسیدن به جدول نهایی آن را تکرار نمایید. اگر مقدار S_M (متغیر کمکی محدودیت مصنوعی) در جدول نهایی دارای مقداری مثبت باشد مسأله دارای جواب بهینه محدود است.

◀ مثال ۵:

$$\text{Max } Z = 6x_1 + 4x_2$$

$$\text{s.t. } x_1 + x_2 \leq 10$$

$$2x_1 + x_2 \geq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

حل: محدودیت دوم مسأله را با ضرب کردن در (-) به $\leq$ تبدیل می‌کنیم و چون ضریب x_1 و x_2 در تابع هدف مثبت است با مجموع آنها محدودیت مصنوعی را به صورت $x_1 + x_2 \leq M$ به مسأله اضافه می‌نماییم:

$$\text{Max } Z = 6x_1 + 4x_2$$

$$\text{s.t. } x_1 + x_2 \leq 10$$

$$-2x_1 - x_2 \leq -4$$

$$x_1 + x_2 \leq M \text{ محدودیت مصنوعی}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\text{Max } Z - 6x_1 - 4x_2 = 0$$

$$\text{s.t. } x_1 + x_2 + S_1 = 10$$

$$-2x_1 - x_2 + S_2 = -4$$

$$x_1 + x_2 + S_M = M$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_M \geq 0$$

اولین جدول سیمپلکس به قرار زیر است:

پایه	x_1	x_2	S_1	S_2	S_M	RHS
Z	-6	-4	0	0	0	0
جدول ۱						
S_1 غیربهینه و	1	1	1	0	0	10
S_2 غیرموجه	-2	-1	0	1	0	-4
S_M	1	1	0	0	1	M

x_1 را به عنوان متغیر ورودی و سطر محدودیت مصنوعی (S_M سطر) را به عنوان سطر خروجی در نظر می‌گیریم و جدول را تکرار می‌کنیم:

¹ Artificial Constraint

^۲ این متغیرها باعث غیر بهینه بودن این جدول هستند.

	پایه	x_1	x_2	S_1	S_2	S_M	RHS
	Z	۰	۲	۰	۰	۶	۶M
بهینه و غیرموجه	S_1	۰	۰	۱	۰	-۱	$-M+۱۰$
	S_2	۰	۱	۰	۱	۲	$۲M-۴$
	x_1	۱	۱	۰	۰	۱	M

جدول ۲

جدول به دست آمده بهینه و غیرموجه است لذا با استفاده از روش سیمپلکس ثانویه تا رسیدن به جدول موجه آن را تکرار می‌نماییم:

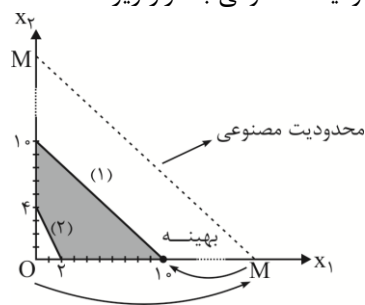
پایه	x_1	x_2	S_1	S_2	S_M	RHS	
Z	۰	۲	۶	۰	۰	۶۰	
بهینه و	S_M	۰	۰	-۱	۰	۱	M-۱۰
موجه	S_2	۰	۱	۲	۱	۰	۱۶
	x_1	۱	۱	۱	۰	۰	۱۰

جدول ۳
(جدول نهایی)

چون در جدول نهایی مقدار S_M مثبت است مسئله دارای جواب بهینه محدود به قرار زیر است:

جواب بهینه: $x_1^* = 10$, $x_2^* = 0$, $Z^* = 60$

حل ترسیمی مثال ۵ بعد از اضافه کردن محدودیت مصنوعی به قرار زیر است.



شکل ۱. حل ترسیمی مثال ۵

پیکان‌ها جهت حرکت را در روش محدودیت مصنوعی از اولین جدول تا جدول نهایی نشان می‌دهند. جدول ۱ متناظر با نقطه O یعنی یک جواب غیربهینه و غیرموجه است. جدول ۲ متناظر با نقطه M یعنی یک جواب بهینه و غیرموجه (فوق بهینه) است. جدول ۳ متناظر با نقطه بهینه است.

وضعیت S_M در جدول نهایی

S_M یکی از دو وضعیت را می‌تواند در جدول نهایی داشته باشد:

- ۱- مقدار S_M در جدول نهایی مثبت است. در این صورت مسئله دارای جواب بهینه محدود است.
- ۲- مقدار S_M در جدول نهایی مساوی صفر است، در این صورت مسئله دارای جواب بهینه نامحدود است.

حالت‌های خاص در روش محدودیت مصنوعی

حالت اول: بدون جواب موجه

اگر در سمت راست جدول عدد منفی باشد ولی رد سطر خروجی عدد منفی برای تعیین متغیر ورودی نباشد مسئله بدون جواب موجه است.

مثال ۶: مسأله زیر و جدول نهایی آن را در نظر بگیرید:

پایه	x_1	x_2	S_1	S_2	S_M	RHS
Max $Z = 4x_1 + 5x_2$						
$-x_1 + x_2 \geq 11$						
$x_2 \leq 6$						
$x_1, x_2 \geq 0$						
Z	0	0	4	9	0	10
S_M	0	0	-1	-2	1	M-1
x_1	1	0	1	1	0	-5
x_2	0	1	0	1	0	6

این جدول غیرموجه است ولی تکرار آن ممکن نیست زیرا در سطر خروجی x_1 ، عدد منفی برای تعیین متغیر ورودی وجود ندارد. لذا مسأله بدون جواب موجه است.

حالت دوم: جواب بهینه چندگانه

اگر ضریب متغیر غیر پایه‌ای در سطر Z جدول نهایی صفر باشد مسأله بیش از یک جواب بهینه دارد.

مثال ۷: جدول زیر و مسأله نهایی آن را در نظر بگیرید:

پایه	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_M	RHS
Max $Z = -10x_1 - 4x_2 + 2x_3$							
$-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$							
$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 8$							
$x_1, x_2, x_3 \geq 0$							
Z	0	0	0	8	3	0	-8
S_M	3	0	0	-2	$-\frac{1}{2}$	1	M
x_2	$\frac{3}{2}$	1	0	-1	$-\frac{1}{2}$	0	2
x_3	-2	0	1	2	$\frac{1}{2}$	0	0

چون ضریب متغیر غیر پایه x_1 در سطر Z جدول نهایی صفر است مسأله بیش از یک جواب بهینه دارد. این مسأله دارای حالت خاص بهینه‌ی تبهگن نیز است؛ زیرا در جدول نهایی مقدار متغیر پایه‌ی x_3 مساوی صفر است.

حالت سوم: جواب بهینه نامحدود

اگر مقدار S_M در جدول نهایی مساوی صفر باشد مسأله دارای جواب بهینه نامحدود است.

مثال ۸: مسأله زیر و جدول نهایی آن را در نظر بگیرید:

پایه	x_1	x_2	S_1	S_2	S_M	RHS
Max $Z = 4x_1 - 5x_2$						
$x_1 - x_2 \geq 2$						
$4x_1 + x_2 \geq 40$						
$x_1, x_2 \geq 0$						
Z	0	5	0	0	4	4M
S_1	0	1	1	0	1	M-2
S_2	0	-1	0	1	4	4M-40
x_1	1	0	0	0	1	M

چون در جدول نهایی مقدار S_M مساوی صفر است مسأله دارای جواب بهینه نامحدود است. یعنی داریم:

$$\text{Max } Z = \infty$$

حالت چهارم: حالت تبهگن یا دژنره

اگر مقدار یکی از متغیرهای پایه صفر باشد مسأله دارای حالت تبهگن است. در صورتیکه این حالت در جدول نهایی باشد مسأله دارای حالت تبهگن دائم یا بهینه تبهگن است. و اگر این حالت در یکی از جدول‌های ماقبل جدول نهایی باشد مسأله دارای حالت تبهگن موقت است. در مثال ۴ مسأله دارای حالت تبهگن دائم است.

روش سیمپلکس اولیه – ثانویه^۱

این روش که در حل مسائل غیرموجه و غیربهینه به کار می‌رود دارای گام‌های زیر است:

- گام ۱-** تابع هدف را به Max و محدودیت‌ها را به $\leq$ تبدیل کنید و اولین جدول سیمپلکس را بنویسید.
- گام ۲-** اثر سیمپلکس اولیه و ثانویه را با استفاده از فرمول زیر به دست آورید. اثر سیمپلکس مقدار تغییر Z را در جدول بعدی نشان می‌دهد.

$$\text{اثر سیمپلکس} = \left| \frac{(Z_j - C_j)(b_i)}{a_{ij}} \right|$$

در این فرمول داریم:

$Z_j - C_j = Z$ ضریب متغیر ورودی در سطر

b_i عدد سمت راست سطر خروجی =

a_{ij} عدد لولا =

- اثر سیمپلکس اولیه زمانی قابل محاسبه است که متغیری با ضریب منفی در سطر Z وجود داشته و عدد ستون لولا و عدد سمت راست مقابل آن مثبت باشند؛ یعنی داشته باشیم:

$$Z_j - C_j < 0, \quad b_i > 0, \quad a_{ij} > 0$$

- اثر سیمپلکس ثانویه زمانی قابل محاسبه است که متغیری با ضریب مثبت در سطر Z وجود داشته و عدد ستون لولا و عدد سمت راست مقابل آن منفی باشند یعنی داشته باشیم:

$$Z_j - C_j > 0, \quad b_i < 0, \quad a_{ij} < 0$$

- ✓ اگر در این گام با منفی‌ترین عدد سطر Z امکان محاسبه اثر سیمپلکس اولیه نباشد از منفی‌ترین عدد دیگر سطر Z استفاده کنید. همین‌طور اگر با منفی‌ترین عدد سمت راست امکان محاسبه‌ی اثر سیمپلکس ثانویه نباشد از منفی‌ترین عدد دیگر سمت راست استفاده نمایید.

- ✓ **توجه:** در محاسبه اثر سیمپلکس اولیه و یا ثانویه مقدار $(Z_j - C_j)$ و یا b_i می‌توانند صفر نیز باشند ولی عدد لولا هیچ‌گاه نمی‌تواند صفر باشد.

گام ۳- بزرگترین مقدار محاسبه شده را در نظر بگیرید. اگر مربوط به اثر سیمپلکس اولیه باشد با استفاده از روش سیمپلکس اولیه و در صورتیکه مربوط به اثر سیمپلکس ثانویه باشد با استفاده از روش سیمپلکس ثانویه جدول را تکرار نمایید. در صورت تکرار جدول با استفاده از روش سیمپلکس اولیه مقدار Z به اندازه اثر سیمپلکس اولیه بیشتر می‌شود و در صورت تکرار جدول با استفاده از روش سیمپلکس ثانویه مقدار Z به اندازه اثر سیمپلکس ثانویه کمتر می‌شود. تکرار جدول را تا رسیدن به جدول نهایی ادامه دهید.

¹ Primal-Dual Method

مثال ۹:

$$\text{Max } Z = 6x_1 + 4x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 10$$

$$2x_1 + x_2 \geq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

حل: محدودیت دوم را در (-) ضرب می کنیم. سپس با استفاده از متغیرهای کمکی محدودیت های مسئله را به صورت مساوی می نویسیم:

$$\text{Max } Z - 6x_1 - 4x_2 = 0$$

$$x_1 + x_2 + S_1 = 10$$

$$-2x_1 - x_2 + S_2 = -4$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0$$

اولین جدول به قرار زیر است:

پایه	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS
Z	-6	-4	0	0	0
غیربهمینه و	S_1	1	1	0	10
غیرموجه	S_2	-2	0	1	-4

جدول ۱

اگر بخواهیم با استفاده از روش سیمپلکس اولیه مسأله را حل کنیم باید x_1 را که دارای منفی ترین ضریب در سطر Z است به عنوان متغیر ورودی انتخاب نماییم. چون a_{11} و b_1 در سطر S_1 مثبت هستند S_1 را نیز به عنوان متغیر خروجی انتخاب می کنیم. یعنی داریم:

$$\text{روش سیمپلکس ثانویه} \begin{cases} x_1: \text{ورودی} \\ S_1: \text{خروجی} \end{cases} \rightarrow \text{اثر سیمپلکس اولیه} = \left| \frac{(-6)(10)}{1} \right| = 60$$

چون اثر سیمپلکس اولیه مساوی ۶۰ است در صورتیکه با استفاده از روش سیمپلکس اولیه جدول را تکرار نماییم مقدار Z به اندازه ۶۰ واحد بیشتر می شود.

چنانچه بخواهیم با استفاده از روش سیمپلکس ثانویه جدول را تکرار نماییم سطر S_2 را که عدد سمت راست آن منفی است به عنوان سطر خروجی انتخاب می کنیم. در سطر S_2 ، a_{21} و a_{22} منفی هستند ولی چون $(Z_1 - C_1)$ و $(Z_2 - C_2)$ مثبت یا صفر نیستند نمی توانیم متغیر ورودی را تعیین نماییم. یعنی تکرار جدول با استفاده از روش سیمپلکس ثانویه ممکن نیست:

$$\text{انجام روش سیمپلکس ثانویه ممکن نیست} \rightarrow \begin{cases} S_2: \text{خروجی} \\ \text{ورودی: نداریم} \end{cases} \text{ روش سیمپلکس ثانویه}$$

بنابراین با استفاده از روش سیمپلکس اولیه جدول ۱ را تکرار می کنیم. جدول ۲ حاصل می شود که بهینه و موجه است^۱:

پایه	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS
Z	0	2	6	0	60
بهمینه و	x_1	1	1	0	10
موجه	S_2	0	1	2	16

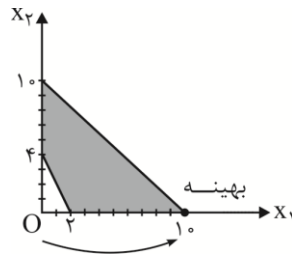
جدول ۲ (جدول نهایی)

^۱ جواب بهینه مسأله با استفاده از روش سیمپلکس اولیه - ثانویه با ۲ جدول حاصل شده است. در صورتیکه جواب بهینه همین مسأله در مثال ۵ با استفاده از روش محدودیت مصنوعی با ۳ جدول به دست آمده بود.

$$x_1^* = 10, x_2^* = 0, Z^* = 60$$

جواب بهینه:

حل ترسیمی مثال ۹ را در نظر بگیرید:



شکل ۳. حل ترسیمی مثال ۹

پیکان، جهت حرکت را از مبدأ مختصات (نقطه O) تا نقطه بهینه در روش سیمپلکس اولیه - ثانویه نشان می‌دهد. جدول ۱ نشان دهنده نقطه O و جدول ۲ نشان دهنده نقطه بهینه است.

◀ مثال ۱۰:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 20 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &\geq 25 \\ 2x_2 + 3x_3 &\geq 30 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

حل:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z - 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 20 \\ -2x_1 - 3x_2 - x_3 &\leq -25 \\ -2x_2 - 3x_3 &\leq -30 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \text{Max } Z - 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + S_1 &= 20 \\ -2x_1 - 3x_2 - x_3 + S_2 &= -25 \\ -2x_2 - 3x_3 + S_3 &= -30 \\ x_1, x_2, x_3, S_1, S_2, S_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

پایه	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	-2	-3	5	0	0	0	0
غیر بهینه و S_1	1	1	1	1	0	0	20
و غیرموجه S_2	-2	-3	-1	0	1	0	-25
S_3	0	-2	-3	0	0	1	-30

جدول ۱

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2: \text{ورودی} \\ S_1: \text{خروجی} \end{array} \right. \text{سیمپلکس اولیه} \rightarrow \text{اثر سیمپلکس اولیه} = \left| \frac{(-3)(20)}{1} \right| = 60$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_2: \text{خروجی} \\ x_3: \text{ورودی} \end{array} \right. \text{سیمپلکس ثانویه} \rightarrow \text{اثر سیمپلکس ثانویه} = \left| \frac{(5)(-30)}{-3} \right| = 50$$

چون اثر سیمپلکس اولیه بیشتر است برای تکرار جدول از روش سیمپلکس اولیه استفاده می‌کنیم. یعنی x_1 را به عنوان متغیر ورودی و S_1 را به عنوان متغیر خروجی در نظر می‌گیریم و جدول را تکرار می‌کنیم:

پایه	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	۱	۰	۸	۳	۰	۰	۶۰
x_2 بهینه و	۱	۱	۱	۱	۰	۰	۲۰
S_2 موجه	۱	۰	۲	۳	۱	۰	۳۵
S_3	۲	۰	-۱	۲	۰	۱	۱۰

جواب بهینه: $x_1^* = 0$, $x_2^* = 20$, $x_3^* = 0$, $Z^* = 60$

حالت‌های خاص در روش سیمپلکس اولیه – ثانویه

حالت اول: بدون جواب موجه

اگر جدول بهینه و موجه نشده باشد و تکرار آن با یکی از روش‌های سیمپلکس اولیه و سیمپلکس ثانویه ممکن نباشد مسأله بدون جواب موجه است.

◀ مثال ۱۱:

$$\text{Max } Z = 4x_1 + 5x_2$$

$$-x_1 + x_2 \geq 11$$

$$x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

حل:

$$\text{Max } Z - 4x_1 - 5x_2 = 0$$

$$x_1 - x_2 + S_1 = -11$$

$$x_2 + S_2 = 6$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0$$

پایه	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS
Z	-۴	-۵	۰	۰	۰
S_1 غیر بهینه	۱	-۱	۱	۰	-۱۱
S_2 و غیر موجه	۰	۱	۰	۱	۶

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2: \text{ورودی} \\ S_2: \text{خروجی} \end{array} \right\} \text{سیمپلکس اولیه} \rightarrow \text{اثر سیمپلکس اولیه} = \left| \frac{(-5)(6)}{1} \right| = 30$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1: \text{خروجی} \\ \text{ورودی: نداریم} \end{array} \right\} \text{سیمپلکس ثانویه} \rightarrow \text{حل مسأله با روش سیمپلکس ثانویه ممکن نیست}$$

با استفاده از روش سیمپلکس اولیه جدول را تکرار می‌نماییم:

پایه	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS
Z	-۴	۰	۰	۵	۳۰
S_1 غیر بهینه	۱	۰	۱	۱	-۵
x_2 و غیر موجه	۰	۱	۰	۱	۶

انجام روش سیمپلکس اولیه ممکن نیست $\rightarrow$ ورودی: x_1 سیمپلکس اولیه خروجی: نداریم

انجام روش سیمپلکس ثانویه ممکن نیست $\rightarrow$ خروجی: S_1 سیمپلکس ثانویه ورودی: نداریم

چون جدول ۲ هنوز بهینه و موجه نشده است و حل آن با روش سیمپلکس اولیه یا ثانویه ممکن نیست مسأله بدون جواب موجه است.

حالت دوم: جواب بهینه ی چندگانه

اگر ضریب متغیر غیر پایه ای در سطر Z جدول نهایی صفر باشد مسأله بیش از یک جواب بهینه دارد.

مثال ۱۲:

$$\text{Max } Z = -10x_1 - 4x_2 + 2x_3$$

$$-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$$

$$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 8$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

حل:

$$\text{Max } Z + 10x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0$$

$$-\frac{1}{2}x_1 + x_2 + x_3 + S_1 = 2$$

$$-2x_1 - 4x_2 - 2x_3 + S_2 = -8$$

$$x_1, x_2, x_3, S_1, S_2 \geq 0$$

پایه	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	RHS
Z	10	4	-2	0	0	0
جدول ۱						
غیر بهینه و	S_1	$-\frac{1}{2}$	1	1	0	2
غیر موجه	S_2	-2	(-4)	-2	0	-8

انجام روش سیمپلکس اولیه $\rightarrow$ ورودی: x_3 سیمپلکس اولیه خروجی: S_1 اثر سیمپلکس اولیه $= \left| \frac{(-2)(2)}{1} \right| = 4$

انجام روش سیمپلکس ثانویه $\rightarrow$ خروجی: S_2 سیمپلکس ثانویه ورودی: x_2 اثر سیمپلکس ثانویه $= \left| \frac{(4)(-8)}{-4} \right| = 8$

چون اثر سیمپلکس ثانویه بیشتر است با استفاده از روش سیمپلکس ثانویه جدول را تکرار می نماییم:

پایه	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	RHS
Z	8	0	-4	0	1	-8
جدول ۲						
غیر بهینه	S_1	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0
و موجه	x_2	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	2

$$\begin{cases} X_3: \text{ورودی} \\ S_1: \text{خروجی} \end{cases} \rightarrow \text{اثر سیمپلکس اولیه} = \left| \frac{(-4)(0)}{\frac{1}{2}} \right| = 0$$

$$\begin{cases} S_1: \text{خروجی} \\ X_1: \text{ورودی} \end{cases} \rightarrow \text{اثر سیمپلکس ثانویه} = \left| \frac{(8)(0)}{-1} \right| = 0$$

با استفاده از سیمپلکس اولیه جدول را تکرار می‌کنیم:

پایه	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	RHS
Z	0	0	0	8	3	-8
بهینه	X_3	-2	0	1	$\frac{1}{2}$	0
و موجه	X_2	$\frac{3}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	2

جدول ۳ (جدول نهایی)

جواب بهینه: $X_1^* = 0$, $X_2^* = 2$, $X_3^* = 0$, $Z = -8$

چون ضریب متغیر پایه‌ی X_1 رد سطر Z جدول نهایی صفر است مسأله بیش از یک جواب بهینه دارد. این مسأله دارای حالت خاص بهینه‌ی تبهگن دائم نیز هست؛ زیرا در جدول نهایی مقدار متغیر پایه‌ی X_3 مساوی صفر است.

حالت سوم: جواب بهینه‌ی نامحدود

اگر تمام اعداد ستون ورودی در روش سیمپلکس اولیه صفر یا منفی باشند مسأله دارای جواب بهینه‌ی نامحدود است.

◀ مثال ۱۳:

$$\text{Max } Z = 24x_1 - 5x_2$$

$$\text{s.t. } 5x_1 - x_2 \geq 42$$

$$4x_1 - x_2 \leq 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

حل:

$$\text{Max } Z - 24x_1 + 5x_2 = 0$$

$$\text{s.t. } -5x_1 + x_2 + S_1 = -42$$

$$4x_1 - x_2 + S_2 = 40$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2 \geq 0$$

پایه	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS
Z	-24	5	0	0	0
غیربهینه	S_1	-5	1	0	-42
و غیرموجه	S_2	4	-1	1	40

جدول ۱

$$\begin{cases} X_1: \text{ورودی} \\ S_2: \text{خروجی} \end{cases} \rightarrow \text{اثر سیمپلکس اولیه} = \left| \frac{(-24)(40)}{4} \right| = 240$$

$$\begin{cases} S_1: \text{خروجی} \\ \text{ورودی: نداریم} \end{cases} \rightarrow \text{انجام روش سیمپلکس ثانویه ممکن نیست}$$

با استفاده از سیمپلکس اولیه جدول را تکرار می‌کنیم:

پایه	x_1	x_2	S_1	S_2	RHS
Z	۰	-۱	۰	۶	۲۴۰
غیربهبینه	S_1	۰	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	۸
و موجه	x_1	۱	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	۱۰

جدول ۲

چون تمام اعداد ستون ورودی (ستون x_2)، در روش سیمپلکس اولیه منفی هستند مسأله دارای جواب بهینه نامحدود است.
یعنی داریم:

$$\text{Max } Z = \infty$$

حالت چهارم: حالت تبهگن یا دژنره

اگر مقدار یکی از متغیرهای پایه صفر باشد مسأله دارای حالت تبهگن است. در مثال ۱۲ مسأله دارای حالت تبهگن دائم و در مثال زیر مسأله دارای حالت تبهگن موقت است.

◀ مثال ۱۴:

$$\begin{aligned}\text{Max } Z &= 15x_1 + 25x_2 \\ 5x_1 + 8x_2 &\geq 100 \\ x_1 + x_2 &\leq 20 \\ x_1 - x_2 &\geq 0 \\ x_1, x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

حل:

$$\begin{aligned}\text{Max } Z - 15x_1 - 25x_2 &= 0 \\ -5x_1 - 8x_2 + S_1 &= -100 \\ x_1 + x_2 + S_2 &= 20 \\ -x_1 + x_2 + S_3 &= 0 \\ x_1, x_2, S_1, S_2, S_3 &\geq 0\end{aligned}$$

پایه	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	RHS	
Z	-۱۵	-۲۵	۰	۰	۰	۰	
غیربهبینه و	S_1	-۵	-۸	۱	۰	۰	-۱۰۰
غیرموجه	S_2	۱	۱	۰	۱	۰	۲۰
	S_3	-۱	۱	۰	۰	۱	۰

جدول ۱

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2: \text{ورودی} \\ S_3: \text{خروجی} \end{array} \right\} \text{سیمپلکس اولیه} \rightarrow \text{اثر سیمپلکس اولیه} = \frac{(-25)(0)}{1} = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1: \text{خروجی} \\ \text{ورودی: نداریم} \end{array} \right\} \text{سیمپلکس ثانویه} \rightarrow \text{انجام روش سیمپلکس ثانویه ممکن نیست}$$

با استفاده از سیمپلکس اولیه جدول را تکرار می‌کنیم:

پایه	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	RHS	
Z	-۴۰	۰	۰	۰	۲۵	۰	
غیر بهینه	S_1	-۱۳	۰	۱	۰	۸	-۱۰۰
و غیر موجه	S_2	(۲)	۰	۰	۱	-۱	۲۰
	x_2	-۱	۱	۰	۰	۱	۰

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1: \text{ورودی} \\ S_2: \text{خروجی} \end{array} \right. \rightarrow \text{اثر سیمپلکس اولیه} = \left| \frac{(-40)(20)}{2} \right| = 400$$

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1: \text{خروجی} \\ S_2: \text{ورودی نداریم} \end{array} \right. \rightarrow \text{انجام روش سیمپلکس ثانویه ممکن نیست}$$

با استفاده از سیمپلکس اولیه جدول را تکرار می‌کنیم:

پایه	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	RHS
Z	۰	۰	۰	۲۰	۵	۴۰۰
جدول ۳						
بهینه (جدول نهایی)	S_1	۰	۰	۱۳	۳	۳۰
				۲	۲	
و موجه	x_1	۱	۰	۱	-۱	۱۰
				۲	۲	
	x_2	۰	۱	۱	۱	۱۰
				۲	۲	

جواب بهینه: $x_1^* = 100$, $x_2^* = 10$, $Z^* = 400$

این مسأله دارای حالت تبهگن موقت است زیرا در جدول ۲ مقدار متغیر پایه‌ی x_2 مساوی صفر است.

مسائل حل شده فصل اول

۱- مسأله زیر را با استفاده از روش محدودیت مصنوعی حل کنید.

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 15x_1 + 25x_2 \\ 4x_1 + 8x_2 &\geq 100 \\ x_1 + x_2 &\leq 20 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

حل:

$$\begin{aligned} \text{Max } Z - 15x_1 - 25x_2 &= 0 \\ -4x_1 - 8x_2 + S_1 &= -100 \\ x_1 + x_2 + S_2 &= 20 \\ x_1 + x_2 + S_M &= M \\ x_1, x_2, S_1, S_2, S_M &\geq 0 \end{aligned}$$

پایه	x_1	x_2	S_1	S_2	S_M	RHS	
Z	-15	-25	0	0	0	0	
جدول ۱							
غیربهمینه و غیرموجه	S_1	-4	-8	1	0	0	-100
	S_2	1	1	0	1	0	20
	S_M	1	1	0	0	1	M
	Z	10	0	0	0	25	25M
جدول ۲							
بهمینه و غیرموجه	S_1	4	0	1	0	8	8M-100
	S_2	0	0	0	1	-1	-M+20
	x_2	1	1	0	0	1	M
	Z	10	0	0	25	0	500
جدول ۳							
بهمینه و موجه	S_1	4	0	1	8	0	60
	S_M	0	0	0	-1	1	M-20
	x_2	1	1	0	1	0	20

جواب بهمینه مسأله به قرار زیر است:

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* = 20, \quad Z^* = 500$$

۲- مسأله زیر را با استفاده از روش محدودیت مصنوعی حل کنید.

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= x_1 - 3x_2 \\ x_1 - x_2 &\leq 2 \\ x_1 + x_2 &\geq 1 \\ 2x_1 - 2x_2 &\geq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

حل:

$$\text{Max } Z - x_1 + 2x_2 = 0$$

$$x_1 - x_2 + S_1 = 2$$

$$-x_1 - x_2 + S_2 = -1$$

$$-2x_1 + 2x_2 + S_3 = -3$$

$$x_1 + S_M = M$$

$$x_1, x_2, S_1, S_2, S_3, S_M \geq 0$$

پایه		x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	S_M	RHS	
	Z	-1	2	0	0	0	0	0	
جدول ۱	S_1	1	-1	1	0	0	0	2	غیر بهینه و
	S_2	-1	-1	0	1	0	0	-1	غیر موجه
	S_3	-2	2	0	0	1	0	-3	
	S_M	1	0	0	0	0	1	M	
	Z	0	2	0	0	0	1	M	
جدول ۲	S_1	0	-1	1	0	0	-1	-M+2	بهینه و
	S_2	0	-1	0	1	0	1	M-1	غیر موجه
	S_3	0	2	0	0	1	2	2M-3	
	x_1	1	0	0	0	0	1	M	
	Z	0	2	1	0	0	0	2	
جدول ۳	S_M	0	1	-1	0	0	1	M-2	بهینه و
	S_2	0	-2	1	1	0	0	1	موجه (جدول نهایی)
	S_3	0	0	2	0	1	0	1	
	x_1	1	-1	1	0	0	0	2	

$$x_1^* = 2, x_2^* = 0, Z^* = 2$$

جواب بهینه مسأله به قرار زیر است:

۳- مسأله زیر را با استفاده از روش سیمپلکی اولیه - ثانویه حل کنید:

$$\text{Min } Z = 4x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 7x_4$$

$$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 6x_4 \leq 38$$

$$2x_2 - 4x_4 \geq 12$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

حل:

$$\text{Max}(-Z) = -4x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 \rightarrow \text{Max}(-Z) + 4x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 7x_4 = 0$$

$$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 6x_4 + S_1 = 38$$

$$-2x_2 + 4x_4 + S_2 = -12$$

تمام متغیرها ≥ 0

	پایه	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	RHS	
	$-Z$	۴	-۲	-۴	۷	۰	۰	۰	
جدول ۱	غیربهمینه و غیرموجه	S_1	۲	۴	۲	۶	۱	۰	۳۸
		S_2	۰	-۲	۰	۴	۰	۱	-۱۲

$$\begin{cases} X_3: \text{ورودی} \\ S_1: \text{خروجی} \end{cases} \rightarrow \text{اثر سیمپلکس اولیه} = \left| \frac{(-4)(38)}{2} \right| = 76$$

$$\begin{cases} S_2: \text{خروجی} \\ \text{ورودی: نداریم} \end{cases} \rightarrow \text{انجام روش سیمپلکس ثانویه ممکن نیست}$$

با استفاده از سیمپلکس اولیه جدول را تکرار می‌کنیم:

	پایه	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	RHS	
	$-Z$	۸	۶	۰	۱۹	۲	۰	۷۶	
جدول ۲	بهمینه و	X_3	۱	۲	۱	۳	$\frac{1}{2}$	۱۹	
	غیرموجه	S_2	۰	-۲	۰	۴	۰	۱	-۱۲

$$\begin{cases} \text{ورودی: نداریم} \\ \text{خروجی:} \end{cases} \rightarrow \text{انجام روش سیمپلکس اولیه ممکن نیست.}$$

$$\begin{cases} S_2: \text{خروجی} \\ X_3: \text{ورودی} \end{cases} \rightarrow \text{اثر سیمپلکس ثانویه} = \left| \frac{(6)(-12)}{-2} \right| = 36$$

با استفاده از سیمپلکس ثانویه جدول را تکرار می‌کنیم:

	پایه	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	RHS	
	$-Z$	۸	۰	۰	۳۱	۲	۳	۴۰	
جدول ۳	بهمینه و	X_3	۱	۰	۱	۷	$\frac{1}{2}$	۷	
	موجه	X_2	۰	۱	۰	-۲	$-\frac{1}{2}$	۶	(جدول نهایی)

$$X_1^* = 0, \quad X_2^* = 6, \quad X_3^* = 7, \quad X_4^* = 0, \quad Z^* = -40$$

جواب بهمینه: