



معادلات دیفرانسیل

از مجموعه کتاب‌های آمادگی کارشناسی ارشد ماهان

محمد محمدپور



ISBN/N: 978-600-458-802-7

محمد پور - محمد
معادلات دیفرانسیل / محمد محمد پور
مشاوران صعود ماهان: ۱۴۰۴
ص: ۵۸۳، جدول، نمودار

فهرست نویسی بر اساس اطلاعات فیبا.

فارسی - چاپ اول

معادلات دیفرانسیل

محمد محمد پور

ج - عنوان

کتابخانه ملی ایران

۴۴۱۶۱۴۷



انتشارات مشاوران صعود ماهان



- ☐ نام کتاب: معادلات دیفرانسیل
- ☐ مدیران مسئول: هادی و مجید سیاری
- ☐ مولف: محمد محمد پور
- ☐ مسئول تولید محتوا: سمیه بیگی
- ☐ ناشر: مشاوران صعود ماهان
- ☐ نوبت و تاریخ چاپ: چاپ اول / ۱۴۰۴
- ☐ تیراژ: ۱۰۰۰ نسخه
- ☐ قیمت: ۷/۷۰۰ / ۰۰۰ ریال
- ☐ شابک: ISBN ۹۷۸-۶۰۰-۴۵۸-۸۰۲-۷

انتشارات مشاوران صعود ماهان: تهران - خیابان ولیعصر، بالاتر از تقاطع ولیعصر مطهری، پلاک ۲۰۵۰

تلفن: ۸۸۱۰۰۱۱۳ و ۸۸۴۰۱۳۱۳

کلیه حقوق مادی و معنوی این اثر متعلق به موسسه آموزش عالی آزاد ماهان می باشد. و هرگونه اقتباس و کپی برداری از این اثر بدون اخذ مجوز پیگرد قانونی دارد.

پیشگفتار

سخن مولف:

خدایا ما را بر آن بدار که لایق بندگی تو باشیم.

با توجه به استقبال فراوان دانشجویان عزیز برای ورود به دانشگاه و آزمون‌های ورودی دانشگاه‌ها و همچنین کمبود کتاب‌های آموزشی مفید و مناسب، سعی بر این داشتیم تا کتابی در خور علم و شأن شما عزیزان ارائه دهیم.

در این کتاب سعی کردیم که درس به‌طور کامل و مفید تدریس شود تا هیچ شبهه‌ای در مطالب این کتاب وجود نداشته باشد.

رویکرد ما در تالیف این کتاب، آموزشی و آزمون محور بوده و دانشجویان عزیز با مطالعه دقیق و عمیق کتاب حاضر، قادر خواهند بود که به سوالات آزمون‌های ورودی دانشگاه‌ها، پاسخ مناسب دهند. به‌طور کلی کتاب حاضر دربردارنده موارد زیر است:

(۱) ارائه درس به‌طور کامل و جامع و مفید به‌طوری که هیچ مطلب مفیدی از قلم نیفتاده باشد.

(۲) ارائه تست‌های تالیفی و کنکور در درس‌نامه‌ها برای تمرین و بیان بهتر مطالب درسی

(۳) ارائه بیش از ۸۰۰ پرسش چهارگزینه‌ای سال‌های گذشته به همراه تست‌های آزمون سراسری سال ۸۹.

(۴) پاسخ تشریحی پرسش‌های چهار گزینه‌ای به‌طوری که به‌راحتی قابل فهم برای خواننده باشد.

(۵) بیان روش‌های کوتاه و تستی در پاسخ‌های تشریحی

(۶) بیان سوالات تستی و کوتاه در قالب نکات و آموزش درس

(۷) حل مرحله به مرحله سوالات به‌طوری که هر دانشجویی با هر رتبه علمی به‌راحتی بتواند مطلب را فراگیرد.

تالیف هیچ کتابی بدون نقص و اشتباه نخواهد بود بنابراین از همه دوستان، همکاران اساتید بزرگوار تقاضا داریم تا نظرات و انتقادات خود را به ایمیل m_mohamadpoor@yahoo.com ارسال نمایند.

در آخر از جناب آقای دکتر سیاری و آقای مهندس سیاری مدیران محترم موسسه ماهان، همچنین دوست عزیز و محترم این‌جانب، جناب آقای مهندس روشناس که زمینه را برای تالیف این کتاب فراهم نمودند، کمال تشکر و سپاس‌گذاری را دارم.

همچنین از همه همکاران محترم و عزیزی که همگی از هیچ تلاشی برای ارائه مطلوب این کتاب فروگذار نکرده‌اند، تشکر و قدردانی می‌نمایم.

محمد محمدپور

سخن ناشر

«به نام حق»

در آغاز ایستاده ایم و به آغاز می‌نگریم،
کلمه نرو خدا بود که بر زبان جاری شد

و

پاک‌ترین آفریدنی انسان، همین کلمه شد...
کلمات را کنار هم می‌نشانیم،

کلمات «جمله» می‌شوند

بر ذهن و دل ما می‌نشینند،

راهی می‌کشایند دست

و روی می‌بندند که به بیراهه می‌روند...

عزیزان را بزم نوشتن کردیم

تا با زلال کلمه

دست و دل و روحمان را از «نمی‌دانم» بفرماییم...

تنها فکر کردیم،

با هم فکر کردیم

و تنها با هم نوشتیم و نوشتیم و نوشتیم...

و هرگاه خسته شدیم به آواز خواندیم که:

ای بی‌خبر بگویش که صاحب خبر شوی...

خبر این است:

در آغاز ایستاده ایم و به آغاز می‌نگریم...

۹ ♦ فصل اول: مقدمه‌ای بر معادلات دیفرانسیل

تعریف معادله دیفرانسیلی

تعریف مرتبه و درجه

انواع معادلات دیفرانسیل

تعریف جواب معادله

تعریف جواب عمومی

جواب غیرعادی

مسیرهای متعامد

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل اول

پاسخ نامه تشریحی تست‌های فصل اول

معادله برنولی

حل معادله برنولی

معادله ریکاتی

حل معادله ریکاتی

حل معادلات مرتبه اول با درجه غیر از یک

محاسبه جواب ویژه از روی جواب عمومی

معادله کلرو

معادله لاگرانژ

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل دوم

پاسخ نامه تشریحی تست‌های فصل دوم

۲۵ ♦ فصل دوم: معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

قضیه یکتایی جواب

نحوه تشکیل معادله دیفرانسیل

تابع جداپذیر

معادله جداپذیر

حل معادله جداپذیر

تابع همگن

معادله همگن

روش حل معادلات همگن

معادلات به فرم $y' = f(ax + by + c)$

معادلات به فرم $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$

معادلات کامل

روش حل معادلات کامل

تعریف عامل انتگرال ساز

روش‌های محاسبه عامل انتگرال ساز

روش حل معادله $Pdx + Qdy = 0$

معادلات مرتبه اول خطی

تعمیم معادله مرتبه اول خطی

۲۶۷ ♦ فصل سوم: معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم

معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم

حل معادلات مرتبه دوم

معادله فاقد y به فرم $f(x, x', x'') = 0$

معادله فاقد x به فرم $f(y, y', y'') = 0$

معادله به فرم $f(y'') = 0$

معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم خطی ناهمگن

الگوریتم حل معادله مرتبه دوم

تعریف دو جواب مستقل خطی

تعریف y_c

روش محاسبه y_c

روش کاهش مرتبه

روش‌های یافتن y_1

حل معادلات خطی مرتبه دوم با ضرایب ثابت

معادلات کوشی - اویلر

حل معادلات کوشی - اویلر

حل معادله مرتبه دوم خطی ناهمگن در حالت کلی

روش‌های محاسبه y_p

روش تغییر متغیر

محاسبه y_p به روش ضرایب نامعین

روش عملگرهای معکوس برای یافتن y_p

انتقال تابع نمایی در عملگرها

فهرست



روش حذف ضریب مشتق

معادله مرتبه دوم کامل

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل سوم

پاسخ نامه تشریحی تست‌های فصل سوم

♦ ۳۷۹ فصل چهارم: حل معادلات دیفرانسیل به کمک سری‌ها

تعریف سری توانی

بسط تیلور

بسط مک‌لورن

تعریف تابع تحلیلی

تعریف نقطه عادی و غیر عادی

تعریف نقطه منظم و نامنظم

حل معادله $y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$ حول

نقطه عادی $x = x_0$

به‌دست آوردن شعاع همگرایی جواب‌های سری معادله

$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$

حل معادله $y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$ حول

نقطه غیرعادی $x = x_0$

معادله دیفرانسیل لژاندر

چند جمله‌ای لژاندر

فرمول رودریگز

کاربرد چند جمله‌ای‌های لژاندر

قضیه بسط لژاندر – فوریه

معادله دیفرانسیل بسل مرتبه n

تعریف تابع گاما

خواص تابع گاما

تابع بسل نوع اول از مرتبه n

تابع بسل نوع دوم از مرتبه n

تبدیل برخی از معادلات دیفرانسیل به معادله بسل با

استفاده از تغییر متغیر

تعامد توابع بسل نوع اول

قضیه تابع مولد

معادله بسل اصلاح شده

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل چهارم

پاسخ نامه تشریحی تست‌های فصل چهارم

♦ ۴۶۵ فصل پنجم: تبدیلات لاپلاس و کاربردهای آن

تعریف لاپلاس

شرط وجود تبدیل لاپلاس

جمع جبری تبدیلات لاپلاس

تعریف تبدیل لاپلاس معکوس

قضیه اول انتقال

تعریف پیچش

قضیه پیچش

تعریف تابع هیوساید

قضیه دوم انتقال

تابع دلتای دیراک

قضیه سوم انتقال

تابع متناوب

تبدیل لاپلاس و مشتق

قضیه تبدیل لاپلاس انتگرال

خاصیت تغییر مقیاس در تبدیل لاپلاس

قضیه تبدیل لاپلاس مشتق

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل پنجم

پاسخ نامه تشریحی تست‌های فصل پنجم

♦ ۵۵۵ سوالات چهارگزینه‌ای کنکور سراسری سال ۹۱-۹۳

♦ ۵۸۳ منابع و مآخذ



تقدیم به پشتیبان و همسر مهربان
و صبورم که بنده را
در تألیف این اثر یاری کردند

فصل اول

مقدمه‌ای بر معادلات دیفرانسیل

آنچه در این فصل می‌خوانیم:

- تعریف معادله دیفرانسیلی
- تعریف مرتبه و درجه
- انواع معادلات دیفرانسیل
- تعریف جواب معادله
- تعریف جواب عمومی
- جواب غیرعادی
- مسیرهای متعامد

مقدمه‌ای بر معادلات دیفرانسیل

تعریف: از ترکیب یک تابع یک متغیره و مشتقات آن تابع نسبت به متغیر، معادله‌ای حاصل می‌شود که به آن معادله دیفرانسیلی گفته می‌شود. معادلات دیفرانسیل به دو دسته تقسیم می‌شوند.

معادلات دیفرانسیلی معمولی: که دارای یک متغیر مستقل بوده و شامل مشتقات معمولی است مانند معادله: $y' - xy = 1$ و یا $y'' - x^2 y' - y = \cos x$.

معادله دیفرانسیلی با مشتقات جزئی که شامل مشتقات جزئی بوده و دارای بیش از یک متغیر مستقل خواهد بود مانند معادله:

$$u_x + u_y = xy$$

تعریف مرتبه و درجه

مرتبه: بالاترین مشتق موجود در یک معادله را مرتبه آن معادله می‌گویند.
درجه: بالاترین توان قسمت مرتبه یک معادله را درجه آن معادله می‌گویند.

مثال: مرتبه و درجه معادلات مقابل را تعیین کنید.

$$y''' - y' - xy = \sin x \quad \text{مرتبه ۳ - درجه ۲}$$

$$y' - y''' - \sin x = 5y \quad \text{مرتبه ۳ - درجه ۲}$$

پس یک معادله دیفرانسیل مرتبه n ام را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots, y', y, x) = 0$$

انواع معادلات دیفرانسیلی

معادلات خطی و غیرخطی: اگر معادله دیفرانسیل بر حسب متغیر وابسته و مشتقات آن یعنی $y', y'', \dots, y^{(n)}$ خطی باشد، به آن معادله خطی می‌گویند و در غیر این صورت معادله غیر خطی خواهد بود. معادله دیفرانسیل خطی از مرتبه n به صورت زیر است:

$$a_n(x)y + a_{n-1}(x)y' + \dots + a_1(x)y^{(n-1)} + a_0(x)y^{(n)} = g(x)$$

و اگر $g(x) = 0$ آن‌گاه معادله همگن (هموزن) خواهد بود و اگر غیر صفر باشد، به آن معادله ناهمگن می‌گویند. به عنوان مثال معادله

$$\frac{dy}{dx} + xy^2 = 1$$

یک معادله غیرخطی و ناهمگن است. دارای جمله y^2 است پس غیرخطی است و چون سمت راست صفر نیست پس

ناهمگن است.

تعریف جواب یک معادله: تابع $y = y(x)$ را جواب یک معادله دیفرانسیلی مرتبه n ام می‌گویند هرگاه تا مرتبه n ام دارای مشتق باشد و در معادله صدق کند.

مثال: نشان دهید که $y = \cos 2x - \frac{x}{4}$ جواب معادله $y'' + 4y = -x$ است.

$$y = \cos 2x - \frac{x}{4} \Rightarrow y' = -2 \sin 2x - \frac{1}{4} \Rightarrow y'' = -4 \cos 2x - 0$$

$$\Rightarrow y'' + 4y = (-4 \cos 2x) + 4 \left(\cos 2x - \frac{x}{4} \right) = -4 \cos 2x + 4 \cos 2x - x$$

$$\Rightarrow y'' + 4y = -x \quad \text{طرف دوم معادله}$$

تست راهنما عبارت $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{3} \cos 2x$ جواب کدام یک از معادلات زیر است؟

$$y'' + y = \cos 2x \quad (1) \quad y'' + y = 0 \quad (3) \quad y' + y = \cos 2x \quad (2) \quad y'' + y = \sin 2x \quad (4)$$

پاسخ تشریحی گزینه ۱

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{3} \cos 2x \Rightarrow y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + \frac{2}{3} \sin 2x$$

$$\Rightarrow y'' = -C_1 \cos x - C_2 \sin x + \frac{4}{3} \cos 2x$$

$$\Rightarrow y'' + y = -C_1 \cos x - C_2 \sin x + \frac{4}{3} \cos 2x + C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{3} \cos 2x$$

$$= \frac{3}{3} \cos 2x = \cos 2x \quad \text{طرف دوم}$$

تعریف جواب عمومی

اگر در یک جواب معادله دیفرانسیلی به تعداد مرتبه معادله، پارامتر داشته باشیم آن جواب را جواب عمومی می‌گویند. به عنوان مثال، در مثال قبل $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{3} \cos 2x$ جواب عمومی معادله $y'' + y = \cos 2x$ است. زیرا به اندازه مرتبه معادله یعنی ۲ (مشتق دوم) دارای پارامترهای C_1, C_2 است.

چنانچه در جواب عمومی به جای پارامترها با توجه به شرایط مساله اعداد مشخص قرار دهیم، به آن جواب، جواب خصوصی گفته می‌شود. به عنوان مثال اگر در مقابل قبلی $C_1 = 1$ و $C_2 = 0$ باشد، به آن جواب خصوصی گفته می‌شود و به صورت مقابل خواهد بود.

$$y = (1) \cos x + (0) \sin x - \frac{1}{3} \cos 2x \Rightarrow y = \cos x - \frac{1}{3} \cos 2x$$

جواب غیر عادی:

اگر از جواب عمومی نسبت به پارامتر موجود مشتق بگیریم، با حذف C از دو رابطه حاصل در صورت امکان، جواب ویژه حاصل می‌شود.

مثال جواب ویژه متناظر هر یک از دسته‌های جواب‌های زیر را در صورت امکان به دست آورید.

$$1) \quad y = cx - c^2 \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } c} 0 = x - 2c \Rightarrow c = \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{x}{2} \times x - \left(\frac{x}{2} \right)^2 \Rightarrow y = \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{4}$$

$${}^2(x-c)^2 + y^2 = c^2 \rightarrow -{}^2(x-c) + 0 = {}^2c \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y^2 = 0 \Rightarrow y = 0$$

← نکته: معادله دیفرانسیلی خطی فاقد جواب غیرعادی (ویژه) است.

مسیرهای متعامد یا قائم:

از آن جا که y' به معنای ضریب زاویه خط مماس بر منحنی مورد نظر در نقطه تماس بر آن است، لذا اگر در معادله دیفرانسیلی $F(x, y, y') = 0$ قرار دهیم $F(x, y, \frac{-1}{y'}) = 0$ در این صورت معادله دیفرانسیلی حاصل را معادله دیفرانسیلی مسیرهای متعامد می نامند که بر دسته جواب های متناظر معادله $F(x, y, y') = 0$ عمود است. زیرا $\frac{-1}{y'}$ به معنای نسبت یا ضریب زاویه خط قائم در نقطه مذکور بر منحنی مسیرهای قائم است.

تست راهنما: مسیرهای متعامد دسته جواب زیر کدام است؟

$$y = cx$$

$$y^2 - {}^2x = c \quad (4)$$

$${}^2x - y = c \quad (3)$$

$$x^2 + y^2 = c^2 \quad (2)$$

$$x^2 + y = c^2 \quad (1)$$

← پاسخ: نشریه: گزینه (2)

معادله دیفرانسیل متناظر دسته خطوط گذرنده از $(0, 0)$

$$y = cx \rightarrow y' = c \Rightarrow y = y'x$$

$$\Rightarrow y = \frac{-1}{y'}x \Rightarrow y = \frac{-1}{\frac{dy}{dx}}x \Rightarrow x \Rightarrow ydy = -xdx$$

$$\Rightarrow \int ydy = \int -xdx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{-x^2}{2} + c_1 \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{2} = c_1$$

$$\Rightarrow x^2 y^2 = {}^2C_1 \Rightarrow x^2 + y^2 = C_2 \quad |C_2| \text{ دسته دایره به مرکز } (0, 0) \text{ و شعاع } |C_2|$$

تست راهنما: مسیرهای قائم دسته جواب $y = cx^2$ کدام است؟

$$\frac{y^2}{c_1^2} + \frac{x^2}{{}^2c_1^2} \quad (4)$$

$$\frac{x}{c_1^2} + \frac{y^2}{c_1^2} = 1 \quad (3)$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad (2)$$

$$\frac{x^2}{c_1^2} + \frac{y}{c_1} = 1 \quad (1)$$

← پاسخ: نشریه: گزینه (4)

$$y = Cx^2 \Rightarrow y' = {}^2Cx \Rightarrow C = \frac{y'}{{}^2x}$$

$$\Rightarrow y = \frac{y'}{{}^2x} \cdot x^2 \Rightarrow y = \frac{y'}{2}x \quad \text{معادله دیفرانسیل دسته سهمی های فوق}$$

حال y' را به $\frac{-1}{y}$ تبدیل می‌کنیم:

$$\Rightarrow y = \frac{-1}{y'} \cdot x \Rightarrow y \frac{-1}{y'} x \quad \text{معادله دیفرانسیل مسیرهای قائم}$$

$$\Rightarrow yy' = \frac{-x}{y} \Rightarrow y \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y} \Rightarrow ydy = \frac{-x}{y} dx \Rightarrow$$

$$\int ydy = \int \frac{-x}{y} dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{-x^2}{2} + c_1 \Rightarrow \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = c_1$$

$$\Rightarrow \frac{y^2}{c_1^2} + \frac{x^2}{2c_1^2} = 1 \quad \text{دسته بیضی‌ها}$$

تست‌های طبقه‌بندی شده فصل اول

۱- در معادله $y = \beta \cos(\omega x + \alpha)$ در صورت حذف ثابت‌های α, β چه رابطه‌ای بدست می‌آید؟

$$y'' - 3y'\omega = 0 \quad (2) \quad y = xy' + (y')^2 + 1 \quad (1)$$

$$y' - 3\omega y = -12 \quad (4) \quad y'' + \omega^2 y = 0 \quad (3)$$

(مهندسی عمران- سراسری ۷۲)

۲- معادله دیفرانسیل $xy'' + |y| + x^2 = 0$:

(۱) خطی، از مرتبه دوم و همگن است

(۲) معادله دیفرانسیلی، غیرخطی و غیر همگن است.

(۳) معادله دیفرانسیلی نوعی کشی - اوپلر است.

(۴) معادله دیفرانسیل معمولی، غیر خطی و همگن است.

(مهندسی برق - سراسری ۷۴)

۳- معادله دیفرانسیل دسته منحنی‌های به معادلات $y = \frac{C_1}{x} + C_2$ کدام است؟

$$xy'' + 2y' = 0 \quad (2) \quad xy'' - y' + 2y = 0 \quad (1)$$

$$x^2y'' + xy' - y = 0 \quad (4) \quad xy'' - 2y' = 0 \quad (3)$$

(مهندسی هسته‌ای- سراسری ۷۷)

۴- معادله دیفرانسیلی که $y = Ax$ (مقدار ثابت) حل عمومی آن باشد، کدام است؟

$$y' = \frac{y}{x^2} \quad (4) \quad y' = \frac{y}{x} \quad (3) \quad y' = x^2y \quad (2) \quad y' = xy \quad (1)$$

(مهندسی شیمی - آزاد ۷۷)

۵- معادله دیفرانسیل حاصل از حذف ثابت A در معادله توابع $y = A \cos 2x + \sin 2x$ کدام است؟

$$(2 \cos 2x)y' + (\sin 2xy) = 2 \quad (2) \quad (2 \sin 2x)y' + (\cos 2x)y = 2 \quad (1)$$

$$(\sin 2x)y' + (2 \cos 2x)y = 2 \quad (4) \quad (\cos 2x)y' + (2 \sin 2x)y = 2 \quad (3)$$

(مهندسی مکانیک- سراسری ۷۷)

۶- در مورد معادله دیفرانسیل زیر کدام یک از گزینه‌ها صحیح است؟

$$y'' + 2y' - 8y = x^2 + \cos x$$

(۱) مرتبه ۲، درجه ۱، خطی، غیر هموژن

(۲) مرتبه ۲، درجه ۱، غیر خطی، غیر هموژن

(۳) مرتبه ۲، درجه ۱، غیر خطی، غیر هموژن

(۴) مرتبه ۲، درجه ۱، خطی، هموژن

(مهندسی پلیمر- آزاد ۷۷)

۷- در مورد معادله دیفرانسیل زیر، کدام یک از گزینه‌ها صحیح است؟

$$y''' + xy'' + 2y(y')^2 + xy = 0$$

(۱) مرتبه ۳، درجه ۱، غیر خطی، هموژن

(۲) مرتبه ۳، درجه ۲، خطی، هموژن

(۳) مرتبه ۱، درجه ۳، خطی، هموژن

(۴) مرتبه ۳، درجه ۱، خطی، هموژن

(مهندسی پلیمر- آزاد ۸۰)

۸- جواب ویژه یا غیرعادی معادله کلو $y = xy' + \cos y'$ کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

$$y = x \cos^{-1} x - \sqrt{x^2 - 1} \quad (2) \quad y = x \cos^{-1} x + \sqrt{1 - x^2} \quad (1)$$

$$y = x \sin^{-1} x + \sqrt{1 - x^2} \quad (4) \quad y = x \sin^{-1} x + \sqrt{x^2 - 1} \quad (3)$$

(مهندسی هوافضا- سراسری ۸۰)

۹- معادله مسیرهای قائم بر دسته منحنی‌های $xy^2 = C$ کدام است؟

$$y^2x = C \quad (4) \quad y^2 - 2x^2 = C \quad (3) \quad x^2 - 2y^2 = C \quad (2) \quad xy^2 = C \quad (1)$$

(مهندسی مخازن هیدروکربوری- سراسری ۸۰)

۱۰- معادله دیفرانسیل $yy''' + 4y = 3x$:

- (۱) خطی و همگن (۲) غیر خطی است و غیر همگن (۳) خطی است و غیر همگن (۴) غیر خطی است و همگن
(مهندسی معدن- آزاد ۸۰)

۱۱- معادله دیفرانسیل $y'' + (\sin x)y - x^2 = 0$:

- (۱) غیر خطی است و غیر همگن (۲) خطی است و همگن (۳) خطی است و غیر همگن (۴) غیر خطی است و همگن
(مهندسی معدن- آزاد ۸۰)

۱۲- معادله دیفرانسیل $y' - e^y = \sin x$:

- (۱) خطی است و همگن (۲) غیر خطی است و همگن (۳) غیر خطی است و غیر همگن (۴) خطی است و غیر همگن
(مهندسی معدن- آزاد ۸۰)

۱۳- معادله دیفرانسیل $e^x y' + 2y - 4 = 0$:

- (۱) خطی است و همگن (۲) خطی است و غیر همگن (۳) غیر خطی است و غیر همگن (۴) غیر خطی است و همگن
(مهندسی انرژی- آزاد ۸۰)

۱۴- معادله دیفرانسیل $(\sin x)y' + (x^2 4x^5)y = f(x)$ چه نوع معادله است؟

- (۱) خطی است. (۲) غیر خطی است. (۳) همگن است. (۴) غیر همگن است.
(مهندسی نساجی- آزاد ۸۱)

۱۵- معادله دیفرانسیل $y' + \sin y = p(x)$ چه نوع معادله‌ای است؟

- (۱) خطی است. (۲) همگن است. (۳) غیر همگن است. (۴) غیر خطی است.
(مهندسی نساجی- آزاد ۸۱)

۱۶- معادله دیفرانسیل $y'' + (\sin x)y' - x^2 y = e^x$ چه نوع معادله‌ای است؟

- (۱) خطی و غیر همگن (۲) خطی و همگن (۳) غیر خطی و غیر همگن (۴) غیر خطی و همگن
(مهندسی مخازن هیدروکربوری- آزاد ۸۱)

۱۷- معادله دیفرانسیلی که $y = \sin(x + A)$ (A مقدار ثابت) حل عمومی آن باشد، کدام است؟

- (۱) $(y')^2 = 1 - y^2$ (۲) $y' = 1 - y^2$ (۳) $y' = 1 + y^2$ (۴) $(y')^2 = 1 + y^2$
(مهندسی شیمی- آزاد ۸۱)

۱۸- معادله دیفرانسیلی که جواب کلی آن $y = C_1 x + C_2 + 2x^2$ باشد، کدام است؟

- (۱) $yy' + (y')^2 = 2$ (۲) $yy'' + (y')^2 = 2$ (۳) $xyy'' + (y')^2 = 2$ (۴) $xyy'' - (y')^2 = 2$
(مهندسی برق آزاد ۸۱)

۱۹- معادله $y'' + 4yy' + 2y - \cos x = 0$ یک معادله:

- (۱) غیر خطی و غیر همگن است. (۲) خطی و همگن است. (۳) غیر خطی و همگن است. (۴) خطی و غیر همگن است.
(مهندسی برق- آزاد ۸۲)

۲۰- معادله دیفرانسیلی که $x = C_1 \sin(\omega + C_2)$ خانواده و ۲- پارامتری از جواب‌های آن است، کدام است؟

- (۱) $x'' = \omega^2 x$ (۲) $x'' = -\omega^2 x$ (۳) $x'' = -C_1 \omega^2 \sin(\omega t + C_2)$ (۴) $x'' = C_1 \omega^2 \sin(\omega t + C_2)$
(مهندسی مکانیک- سراسری ۸۲)

۲۱- برای این که معادله دیفرانسیلی $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + f(x)y^m = 0$ خطی باشد، باید:

- (۱) $m = 1$ (۲) $n = 0, m = 1$ (۳) $f(x), n = 0$ ثابت (۴) $m = n = 0$
(مهندسی هسته‌ای- سراسری ۸۲)

۲۲- معادله دیفرانسیل سهمی به معادله $y = cx^2 + d$ کدام است؟

$$xy'' - y' = 0 \quad (2) \quad x^2 y'' - 2xy' + y = 0 \quad (1)$$

$$y'' + (x^2 - 2x)y' + y = 0 \quad (4) \quad 2xy'' - x^2 y' + y = 0 \quad (3)$$

(مهندسی مکانیک - آزاد ۸۲)

۲۳- معادله دیفرانسیل $y'' = \sin y$ چه نوع معادله‌ای است؟

(۱) خطی و همگن (۲) خطی و غیرهمگن (۳) غیرخطی و همگن (۴) غیرخطی و غیرهمگن
(مهندسی مخازن هیدروکربوری - آزاد ۸۲)

۲۴- معادله دیفرانسیل دسته منحنی $(y-a)^2 = 2bx$ به کدام صورت است؟

$$xy'' + 2y' = 0 \quad (4) \quad 2xy'' + y' = 0 \quad (3) \quad 2y'' + xy' = 0 \quad (2) \quad y'' + 2xy' = 0 \quad (1)$$

(مهندسی کشاورزی - سراسری ۸۲)

۲۵- معادله دیفرانسیل $y'' = (y' - y)\cos x$ یک معادله:

(۱) خطی و غیرهمگن است. (۲) خطی و همگن است. (۳) غیرخطی و همگن است. (۴) غیرخطی و غیرهمگن است.
(مهندسی نساجی - آزاد ۸۲)

۲۶- معادله $x^2 y' + 2xy - x + 1 = 0$ یک معادله دیفرانسیل:

(۱) خطی و غیرهمگن است. (۲) خطی و همگن است. (۳) غیرخطی و غیرهمگن است. (۴) غیرخطی و همگن است.
(مهندسی نساجی - آزاد ۸۲)

$$27- \text{معادله دیفرانسیل } \frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} y + \sin x = 0$$

(۱) یک معادله دیفرانسیل معمولی است. (۲) یک معادله دیفرانسیل پاره است.
(۳) فرم خاصی از معادله لاپلاس است. (۴) یک معادله دیفرانسیل خطی است.
(معماری کشتی - سراسری ۸۳)

۲۸- معادله دیفرانسیل تمام سهمی‌ها که محور تقارن آنها منطبق بر Ox باشد، کدام است؟

$$yy' + y''^2 = 0 \quad (4) \quad yy'' + y'^2 = 0 \quad (3) \quad xy'' = y' \quad (2) \quad y'' = xy' \quad (1)$$

(مهندسی هوا فضا - سراسری ۸۳)

۲۹- مسیرهای متعامد خانواده هذلولی‌های $x^2 - y^2 = C^2$ کدام یک از منحنی‌های زیر هستند؟

(۱) دایره‌ها (۲) سهمی‌ها (۳) بیضی‌ها (۴) هذلولی‌ها
(مهندسی معدن - آزاد ۸۳)

۳۰- تابع $y_1 = \sin x, y_2 = x$ جواب‌های کدام یک از معادلات دیفرانسیل هستند؟

$$y''(\sin x - x \cos x) - y'x \sin x + y \sin x = 0 \quad (2) \quad y'' \sin x + y(\sin x - x \cos x) = 0 \quad (1)$$

$$y'' \sin x - y'x \sin x + y(\sin x - x \cos x) = 0 \quad (4) \quad y''(\sin x - x \cos x) + y \sin x = 0 \quad (3)$$

(مهندسی هسته‌ای - سراسری ۸۳)

۳۱- معادله مسیر قائم خانواده هذلولی‌های $yx = C$ کدام است؟

$$x - y = C(x + y)^2 \quad (2) \quad y^2 - x^2 = C \quad (1)$$

$$x^2 - 2Cy = C^2, C > 0 \quad (4) \quad x^2 + (y - C)^2 = C^2 \quad (3)$$

(مهندسی عمران نقشه‌برداری - سراسری ۸۴)

۳۲- مسیر قائم دسته منحنی $y^2 = cx^2$ که از نقطه $(2, 4)$ می‌گذرد کدام است؟

$$x^2 - 3y^2 = -44 \quad (4) \quad 2x^2 + 3y^2 = 56 \quad (3) \quad 2x^2 - 3y^2 = -40 \quad (2) \quad x^2 + 3y^2 = 48 \quad (1)$$

(مهندسی نساجی - سراسری ۸۴)

۳۳- معادله مسیرهای قائم خانواده منحنی‌های $y = \frac{c}{e^{2x}}$ که در آن C ثابت دلخواه (پارامتر) است، عبارت است از:

$$(1) \quad y = c\sqrt{x} \quad (2) \quad y = \text{Ln} x^c \quad (3) \quad y = \sqrt{x+c} \quad (4) \quad y = \text{Ln}\sqrt{x+c}$$

(مهندسی فرآوری و انتقال گاز- سراسری ۸۵)

۳۴- مسیرهای قائم بر دسته منحنی $x^2 - y^2 - 2x + 4 - \lambda = 0$ کدام است؟

$$(1) \quad x - xy = c \quad (2) \quad y - xy = c \quad (3) \quad y + xy = c \quad (4) \quad x + xy = c$$

(مهندسی برق- سراسری ۸۶)

۳۵- معادله مسیر قائم خانواده منحنی‌های $y' = cx^2$ چیست؟

$$(1) \quad 3x^2y + y^3 = k \quad (2) \quad 2x^2 + 3y^2 = k^2 \quad (3) \quad x^2y + y^2 = k^2 \quad (4) \quad 3x^2y + 2y^2 = k$$

(مهندسی عمران- سراسری ۸۶)

۳۶- تابع $y = x^2 e^x$ جواب کدام معادله دیفرانسیل است؟

$$(1) \quad y''' - 2y'' + y' = 0 \quad (2) \quad y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$$

$$(3) \quad y^{(4)} + 3y''' + 3y'' + y' = 0 \quad (4) \quad y^{(4)} - 3y''' + 3y'' - y' = 0$$

(مهندسی مکانیک- سراسری ۸۶)

۳۷- دستگاه معادلات

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = y + 2x \end{cases}$$

هم‌ارز کدام معادله است؟

$$(1) \quad x'' - 2x' - 3 = 0 \quad (2) \quad x''' + 2x'' + 3x' = 0 \quad (3) \quad x''' - 2x'' - 3x' = 0 \quad (4) \quad x''' - 2x'' + 3x' = 0$$

(مهندسی مکترونیک- سراسری ۸۶)

۳۸- تابع $y = 2 \cos 3x + 3 \sin 3x$ جواب کدام معادله دیفرانسیل است؟

$$(1) \quad y' + 9y = 0 \quad (2) \quad y'' + 9y = 0 \quad (3) \quad y'' - 9y' = 0 \quad (4) \quad y'' + 3y' = 0$$

(مهندسی هوا فضا- سراسری ۸۸)

۳۹- معادله دیفرانسیل خانواده سهمی‌هایی که کانون آن‌ها مبدأ انتقال و محور آن‌ها محور x هاست، کدام است؟

$$(1) \quad x \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2x \frac{dy}{dx} - y = 0$$

$$(2) \quad x^2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - x \frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$(3) \quad y \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2 \frac{dy}{dx} + x = 0$$

$$(4) \quad y \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 2x \frac{dy}{dx} - y = 0$$

(مهندسی هوا فضا- سراسری ۸۸)

۴۰- مسیر قائم (متعامد) خانواده هذلولی‌های $xy = C$ که در آن C ثابت است، کدام یک از خانواده منحنی‌هاست؟

$$(1) \quad x^2 + y^2 = C \quad (2) \quad x^2 - y^2 = C$$

$$(3) \quad x^2 + 2y^2 = C \quad (4) \quad 2x^2 - y^2 = C$$

(مهندسی عمران- نقشه‌برداری ۹۰)

پاسخ نامه تشریحی تست های فصل اول

$$y = \beta \cos(\omega x + \alpha) \Rightarrow \cos(\omega x + \alpha) = \frac{y}{\beta} \quad (1- \text{گزینه } 3)$$

$$\Rightarrow y' = -\beta \omega \sin(\omega x + \alpha) \Rightarrow y'' = -\beta \omega^2 \cos(\omega x + \alpha)$$

$$\Rightarrow y'' = -\beta \omega^2 \times \frac{y}{\beta} \Rightarrow y'' = -\omega^2 y \Rightarrow y'' + \omega^2 y = 0$$

۲- گزینه ۲

$$xy'' + |y| + x^2 = 0 \Rightarrow xy'' + |y| = -x^2$$

چون سمت راست تساوی صفر نیست، پس معادله ناهمگن است.

۳- گزینه ۲

$$y = \frac{c_1}{x} + c_2 \Rightarrow y' = \frac{-c_1}{x^2} \Rightarrow c_1 = -y'x^2$$

$$\Rightarrow y'' = \frac{2xc_1}{x^3} = \frac{2c_1}{x^2} \Rightarrow y''x^2 = 2c_1 \xrightarrow{c_1 = -y'x^2} y''x^2 = -2y'x^2$$

$$\Rightarrow y''x = -2y' \Rightarrow xy'' + 2y' = 0$$

۴- گزینه ۳

$$y = Ax \Rightarrow y' = A, \quad y = Ax \Rightarrow A = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = \frac{y}{x}$$

۵- گزینه ۳

$$y = A \cos 2x + \sin 2x \Rightarrow y' = -2A \sin 2x + 2 \cos 2x$$

$$\Rightarrow y' - 2 \cos 2x = -2A \sin 2x \Rightarrow A = \frac{y' - 2 \cos 2x}{-2 \sin 2x} = \frac{2 \cos 2x - y'}{2 \sin 2x}$$

$$\xrightarrow{\text{A را در معادله اصلی قرار می دهیم}} y = \left(\frac{2 \cos 2x - y'}{2 \sin 2x} \right) \cos 2x + \sin 2x \xrightarrow{\times 2 \sin 2x}$$

$$(2 \sin 2x)y = 2 \cos^2 2x - y' \cos 2x + 2 \sin^2 2x \Rightarrow$$

$$(2 \sin 2x)y + (\cos 2x)y' = 2(\cos^2 2x + \sin^2 2x) \Rightarrow (2 \sin 2x)y + (\cos 2x)y' = 2$$

$$y'' + 2y' - xy = x^2 + \cos x \quad (6- \text{گزینه } 1)$$

معادله دارای مشتق دوم (مرتبه ۲) است و توان مشتق دوم نیز ۱ (درجه) است و چون سمت راست عبارت صفر نیست، پس معادله غیرهمگن است. معادله خطی است.

$$y''' + xy'' + 2y = (y')^2 + xy = 0 \quad (7- \text{گزینه } 1)$$

معادله دارای مشتق سوم (مرتبه ۳) بوده و توان مشتق سوم ۱ (درجه) است و چون سمت راست تساوی صفر است، پس معادله همگن است و به دلیل وجود y'^2 معادله غیرخطی است.

۸- گزینه ۴

$$y = xy' + \cos y'$$

برای به دست آوردن جواب ویژه اگر در معادله y' وجود داشت ابتدا به جای آن C قرار می‌دهیم و سپس نسبت به C مشتق می‌گیریم و حل می‌کنیم.

$$y = cx + \cos c \Rightarrow x - \sin c = 0 \Rightarrow x = \sin c \Rightarrow c = \sin^{-1} x$$

$$\xrightarrow{\text{در معادله بالا قرار می‌دهیم}} y = (\sin^{-1} x)x + \cos(\sin^{-1} x) \Rightarrow y = (\sin^{-1} x) + \sqrt{1-x^2}$$

توجه: با توجه به معادلات مثلثاتی دو رابطه مهم زیر را داریم:

$$1) \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$2) \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$$

۹- گزینه ۳

$$xy'' = c \rightarrow y'' + 2yy'x = 0 \xrightarrow{y' \rightarrow \frac{-1}{y'}} y'' + 2xy \left(\frac{-1}{y'} \right) = 0$$

$$\Rightarrow y'' - 2xy \frac{dx}{dy} = 0 \xrightarrow{\times dy} y'' dy - 2xy dx = 0 \Rightarrow y'' dy = 2xy dx$$

$$\Rightarrow \int y'' dy = \int 2x dx \Rightarrow \frac{y''}{2} = x^2 + c_1 \xrightarrow{\times 2} y'' - 2x^2 = 2c_1 \Rightarrow y'' - 2x^2 = c_2$$

۱۰- گزینه ۲

$$yy''' + 4y = 3x$$

چون سمت راست معادله صفر نیست پس معادله غیرهمگن است و همچنین معادله غیرخطی است، زیرا:

$$yy''' + 4y = 3x \Rightarrow y''' + 4 = \frac{3x}{y} \Rightarrow y''' - 3xy^{-1} = -4$$

۱۱- گزینه ۳

$$y'' + (\sin x)y - x^2 = 0 \Rightarrow y'' + (\sin x)y = x^2$$

چون به غیر از y و مشتق آن تابع دیگری از y وجود ندارد، معادله خطی است و چون سمت راست صفر نیست پس معادله غیرهمگن است.

۱۲- گزینه ۳

$$y' - e^y = \sin x$$

چون سمت راست صفر نیست پس غیر همگن است و به دلیل وجود جمله e^y معادله غیرخطی است.

۱۳- گزینه ۲

$$e^x y' + 2y - 4 = 0 \Rightarrow e^x y' + 2y = 4$$

چون سمت راست صفر نیست پس غیرهمگن و خطی است. دقت کنید جمله e^x بر حسب x بوده و اشکالی در خطی بودن معادله ایجاد نمی‌کند.

۱۴- گزینه ۱

$$(\sin x)y' + (x^2 + 4x^5)y = f(x)$$

چون تابع فقط بر حسب y و مشتقات آن است، قطعاً خطی است ولی اگر $f(x) = 0$ باشد، معادله همگن و اگر $f(x) \neq 0$ باشد، غیرهمگن

است. پس مشخص نیست.

۱۵- گزینه ۴)

$$y' + \sin y = p(x)$$

به دلیل وجود $\sin y$ معادله غیر خطی است. در معادله خطی فقط باید y و مشتقات آن موجود باشد. همچنین اگر $p(x) = 0$ باشد، معادله همگن و اگر $p(x) \neq 0$ باشد، معادله غیر همگن است.

۱۶- گزینه ۱)

$$y'' + (\sin x)y' - x^2 y = e^x$$

به دلیل این که سمت راست صفر نیست پس معادله غیر همگن است و چون تابع بر حسب y و مشتقات آن است پس خطی است.

۱۷- گزینه ۱)

$$y = \sin(x + A) \Rightarrow y' = \cos(x + A) \Rightarrow \text{امتحان گزینه ها}$$

$$\cos^2(x + A) = 1 - \sin^2(x + A) \Rightarrow (y')^2 = 1 - y^2$$

۱۸- هیچ کدام

$$y = c_1 x + c_2 + 2x^2 \Rightarrow y' = c_1 + 4x \Rightarrow y'' = 4$$

اگر y'' , y' , y را در گزینه ها قرار دهیم مشاهده می شود که هیچ یک از گزینه ها جواب نمی دهد.

۱۹- گزینه ۱)

$$y'' + 4yy' + 2y - \cos x = 0 \Rightarrow y'' + 4yy' + 2y = \cos x$$

چون سمت راست صفر نیست معادله غیر همگن است و به دلیل وجود $4yy'$ معادله غیر خطی است.

۲۰- گزینه ۲)

$$x = c_1 \sin(\omega t + c_2) \Rightarrow x' = c_1 \omega \cos(\omega t + c_2) \Rightarrow x'' = -c_1 \omega^2 \sin(\omega t + c_2)$$

و از معادله اصلی داریم:

$$c_1 = \frac{x}{\sin(\omega t + c_2)} \xrightarrow{\text{با جایگذاری در } x''} x'' = -\frac{x}{\sin(\omega t + c_2)} \times \omega^2 \sin(\omega t + c_2) \Rightarrow x'' = -x\omega^2$$

۲۱- گزینه ۱)

$$x^n \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + f(x)y^m = 0$$

اگر $m = 1$ باشد، معادله خطی خواهد بود.

۲۲- گزینه ۱)

$$y = cx^2 + d \Rightarrow y' = 2cx \Rightarrow y'' = 2c \Rightarrow c = \frac{y''}{2}$$

$$xy'' - y' = 0 \xrightarrow{\text{با جایگذاری در معادله } y'} y' = 2 \times \frac{y''}{2} x \Rightarrow y' - xy'' = 0$$

۲۳- گزینه ۳)

$$y'' = \sin y \Rightarrow y'' - \sin y = 0$$

چون سمت راست جمله $f(x)$ نداریم پس معادله همگن بوده و به دلیل وجود $\sin y$ معادله غیرخطی است.

۲۴- گزینه ۳

$$(y-a)^r = r b x \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } x} r y' (y-a) = r b \Rightarrow \text{(I)}$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } x} r y'' + r y'' (y-a) = 0 \quad \text{(II)}$$

از معادله (I) داریم:

$$b = y'(y-a)$$

$$a = \frac{y'^r}{y''} + y$$

و از معادله (II) داریم:

مقدار a را در معادله اول قرار دهیم:

$$b = y'(y-a) \Rightarrow b = y' \left(y - \left[\frac{y'^r}{y''} + y \right] \right) = -\frac{y'^r}{y''}$$

حال با به دست آوردن a, b آنها را در معادله اصلی قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} (y-a)^r &= r b x \Rightarrow \left(y - \frac{y'^r}{y''} - y \right)^r = r x \left(-\frac{y'^r}{y''} \right) \\ \Rightarrow \frac{y'^r}{y''^r} &= -r x \frac{y'^r}{y''} \Rightarrow \frac{y'}{y''} = -r x \Rightarrow y' + r x y'' = 0 \end{aligned}$$

۲۵- گزینه ۲

$$y'' = (y' - y) \cos x \Rightarrow y'' - y' \cos x + y \cos x = 0$$

چون سمت راست معادله صفر است، معادله همگن بوده و چون تابع بر حسب y و مشتقات آن است، پس معادله خطی است.

۲۶- گزینه ۱

$$x^r y' + r x y - x + 1 = 0 \Rightarrow x^r y' + r y = x - 1$$

چون سمت راست صفر نیست پس معادله همگن است و چون معادله بر حسب y, y' است، پس خطی است.

۲۷- گزینه ۴

$$\frac{d^r y}{dx^r} - r \frac{dy}{dx} y + \sin x = 0 \Rightarrow \frac{d^r y}{dx^r} - r \frac{dy}{dx} y = -\sin x$$

چون سمت راست صفر نیست پس معادله غیرهمگن بوده و به دلیل وجود جمله $r \frac{dy}{dx} y$ معادله غیرخطی است.

← نکته اگر معادله بر حسب $\frac{d}{dx}$ باشد معمولی است و اگر بر حسب $\frac{\partial}{\partial x}$ باشد، جزئی یا پاره‌ای است.

۲۸- گزینه ۳

چون محور X ها محور تقارن سهمی است یعنی سهمی افقی است و معادله سهمی افقی به صورت زیر است:

$$(y-b)^r = r d(x-a) \rightarrow x - c_1 = c_2 y^r$$

$$\Rightarrow x = c_1 + c_2 y^2 \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } x} 1 = 0 + 2yy'c_2 \Rightarrow 2yy'c_2 = 1$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } x} 2y'^2c_2 + 2yy''c_2 = 0 \Rightarrow c_2 (2y'^2 + 2yy'') = 0 \Rightarrow y'^2 + yy'' = 0$$

۲۹- گزینه ۴

$$x^2 - y^2 = C^2 \Rightarrow 2x - 2yy' = 0 \xrightarrow{y' = \frac{-1}{y}} 2x - 2y \left(\frac{-1}{y} \right) = 0 \Rightarrow x + y \frac{dx}{dy} = 0 \xrightarrow{\times dy} xdy + ydx = 0$$

$$\Rightarrow d(xy) = 0 \Rightarrow \int d(xy) = 0 \Rightarrow xy = C$$

و یا می توان گفت:

$$y' = \frac{x}{y} \xrightarrow{y' = \frac{-1}{y}} \frac{-1}{y'} = \frac{x}{y} \Rightarrow -\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow -\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln y = -\ln x + \ln c \Rightarrow \ln y = -\ln x + \ln c \Rightarrow \ln y = \ln \frac{c}{x} \Rightarrow y = \frac{c}{x} \quad \text{هذلولی}$$

۳۰- گزینه ۲

$$y_1 = \sin x, y_2 = x$$

← نکته اگر $y_1, y_2, \dots, y_n$ جواب های معادله باشند، برای به دست آوردن معادله دیفرانسیلی از دترمینان زیر استفاده می کنیم:

$$\begin{vmatrix} y & f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_n(x) \\ y' & f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y^{(n)} & f_1^{(n)}(x) & f_2^{(n)}(x) & \dots & f_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} = 0$$

و در این مثال داریم:

$$\begin{vmatrix} y & \sin x & x \\ y' & \cos x & 1 \\ y'' & -\sin x & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow y(\cos x \times 0 + 1 \times \sin x) - \sin x(y' \times 0 - (1 \times y'')) + x(-y' \sin x - y'' \cos x) = 0$$

$$\Rightarrow y''(\sin x - x \cos x) - y'(x \sin x) + y \sin x = 0$$

و یا می توان از چک کردن دو جواب y_1, y_2 در معادلات استفاده کرد که تنها در گزینه (۲) هر دو جواب y_1, y_2 صدق می کند.

۳۱- گزینه ۱

$$xy = c \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } x} y + xy' = 0 \xrightarrow{y' = \frac{-1}{y}} y + x \left(\frac{-1}{y} \right) = 0$$

$$\Rightarrow y - x \frac{dx}{dy} = 0 \xrightarrow{\times dy} ydy - xdx = 0 \Rightarrow ydy = xdx$$

$$\Rightarrow \int y dy = \int x dx \Rightarrow \frac{y^r}{r} = \frac{x^r}{r} + c_1 \Rightarrow y^r - x^r = rc_1 \xrightarrow{rc_1=c_r} y^r - x^r = c_r$$

۳۲- گزینه ۳

$$y^r = cx^r \Rightarrow c = \frac{y^r}{x^r}, ryy' = r\left(\frac{y^r}{x^r}\right)x^r \Rightarrow ry' = r\frac{y}{x} \xrightarrow{y' \rightarrow \frac{-1}{y'}} -r \times \frac{1}{y'} = r\frac{y}{x} \Rightarrow$$

$$y' = -\frac{r}{r} \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{r}{r} \frac{x}{y} \Rightarrow ryy' + rxdx = 0 \xrightarrow{\text{انتگرال می‌گیریم}} \frac{r}{r} y^r + x^r = c \xrightarrow{\left| \frac{r}{r} \right|} \frac{r}{r} \times 16 + 4 = c$$

$$\Rightarrow c = 28 \Rightarrow ry^r + rx^r = 28$$

۳۳- گزینه ۳

$$y = \frac{c}{rx} \Rightarrow c = ye^{rx} \xrightarrow{\text{مشتق}} 0 = y'e^{rx} + rye^{rx}$$

$$y'e^{rx} = -rye^{rx} \Rightarrow y' = -ry \xrightarrow{y' \rightarrow \frac{-1}{y'}} \frac{-1}{y'} = -ry \Rightarrow \frac{dx}{dy} = ry \Rightarrow$$

$$\int dx = r \int y dy \Rightarrow x = y^r + c \Rightarrow y^r = x + c \Rightarrow y \pm \sqrt{x+c}$$

۳۴- گزینه ۲

$$x^r - y^r - rx + 4 - \lambda = 0 \xrightarrow{\text{مشتق}} rx - ryy' - r = 0 \Rightarrow x - yy' - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$yy' = x - 1 \Rightarrow y' = \frac{x-1}{y} \xrightarrow{y' \rightarrow \frac{-1}{y'}} \frac{-1}{y'} = \frac{x-1}{y} \Rightarrow -\frac{dx}{dy} = \frac{x-1}{y} \Rightarrow$$

$$-\int \frac{dx}{x-1} = \int \frac{dy}{y} \Rightarrow -\ln|x-1| = \ln y + \ln c \Rightarrow \ln y + \ln(x-1) = \ln c \Rightarrow$$

$$\ln y(x-1) = \ln c \Rightarrow yx - y = c \xrightarrow{x(-1)} y - xy = -c \xrightarrow{-c=c_1} y - xy = c_1$$

۳۵- گزینه ۲

$$y^r = cx^r \Rightarrow c = \frac{y^r}{x^r} \xrightarrow{\text{مشتق}} 0 = \frac{ryy'x^r - rx^ry'}{x^{2r}} \Rightarrow y(ryy' - rx'y) = 0 \Rightarrow$$

$$ryy' - rx'y = 0 \Rightarrow y' = \frac{r}{r} \times \frac{y}{x} \xrightarrow{y' \rightarrow \frac{-1}{y'}} \frac{-1}{y'} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{-1}{y'} = \frac{ry}{rx} \Rightarrow \frac{-dx}{dy} = \frac{ry}{rx} \Rightarrow -\int rxdx = \int ryydy \Rightarrow -x^r = \frac{r}{r} y^r + c \xrightarrow{-x^r} \rightarrow$$

$$-rx^r = ry^r + rc \xrightarrow{rc=k^r} ry^r + rx^r = k^r$$

۳۶- گزینه ۴

$$y = x^r e^x \Rightarrow y' = r x e^x + x^r e^x \Rightarrow y' = r x e^x + y \Rightarrow y' - y = r x e^x$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}} y'' - y' = r e^x + r x e^x, y' - y = r x e^x \Rightarrow y'' - y' = r e^x + y' - y \Rightarrow$$

$$y'' - r y' + y = r e^x \xrightarrow{\text{مشتق}} y''' - r y'' + y' = r e^x \Rightarrow y''' - r y'' + y' = y'' - r y' + y \Rightarrow$$

$$y''' - r y'' + r y' - y = 0 \xrightarrow{\text{مشتق}} y^{(4)} - r y''' + r y'' - y' = 0$$

۳۷- گزینه ۳

$$\begin{cases} \dot{x} = x + r y \Rightarrow y = \frac{\dot{x} - x}{r} \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } t} \dot{y} = \frac{\ddot{x} - \dot{x}}{r} \\ \dot{y} = y + r x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{\ddot{x} - \dot{x}}{r} = y + r x \Rightarrow \frac{\ddot{x} - \dot{x}}{r} = \frac{\dot{x} - x}{r} + r x \xrightarrow{\times r} \ddot{x} - r \dot{x} + x - r x = 0$$

$$\Rightarrow \ddot{x} - r \dot{x} - r x = 0 \xrightarrow{\text{مشتق نسبت به } x} \ddot{x} - r \ddot{x} - r \dot{x} = 0$$

۳۸- گزینه ۲

$$y = r \cos 3x + r \sin 3x \Rightarrow y' = -r \sin 3x + r \cos 3x$$

$$y'' = -r \cos 3x - r \sin 3x \Rightarrow y'' + y = 0$$

۳۹- گزینه ۴

معادله این سهمی به صورت $y^r = r c(x + c)$ است و برابر به دست آوردن معادله دیفرانسیل متناظر با یک دسته منحنی باید پارامتر C را با مشتق گیری حذف کنید.

$$y^r = r c x + r c^r \xrightarrow{\text{مشتق}} r y y'' = r c \Rightarrow y y' = r c$$

$$\Rightarrow y^r = r y y' x + y^r y^{r'} \xrightarrow{\times \frac{1}{y}} r y' x + y y^{r'} - y = 0 \Rightarrow y \left(\frac{dy}{dx} \right)^r + r x \left(\frac{dy}{dx} \right) - y = 0$$

۱۳- گزینه ۲

$$xy = C \xrightarrow{y' \rightarrow \frac{-1}{y'}} y + x y' = 0 \xrightarrow{y' \rightarrow \frac{-1}{y'}} y - \frac{x}{y'} = 0 \rightarrow y = \frac{x}{y'} \rightarrow y' y = x \rightarrow$$

$$\int y dy = \int x dx \rightarrow \frac{1}{r} y^r = \frac{1}{r} x^r + C \rightarrow y^r - x^r = C,$$

فصل دوم

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

آنچه در این فصل می‌خوانید:

قضیه یکتایی جواب
نحوه تشکیل معادله دیفرانسیل
روش‌های حل معادله مرتبه اول
تعریف عامل انتگرال ساز یا فاکتور انتگرالی
روش‌های محاسبه عامل انتگرال ساز (μ)
تعمیم معادله خطی مرتبه اول
معادله برنولی

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

مقدمه: صورت عمومی این گونه معادلات عبارت است از:

$$F(y', y, x) = 0 \text{ نمایش ضمنی}$$

$$y' = f(x, y) \text{ نمایش صریح}$$

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \text{ نمایش دیفرانسیلی}$$

و یا:

$$\begin{cases} Xdx + Ydy = 0 \\ Mdx + Ndy = 0 \end{cases}$$

به عنوان مثال خواهیم داشت:

$$1) xy' - y = 1 \Rightarrow xy' - y - 1 = 0 \Rightarrow F(y', y, x) = xy' - y - 1 \text{ نمایش ضمنی}$$

$$2) y' = \frac{y+1}{x} \Rightarrow f(x, y) = \frac{y+1}{x} \text{ نمایش صریح}$$

$$3) (1-y)dx + xdy = 0 \Rightarrow \begin{cases} P(x, y) = 1-y \\ Q(x, y) = x \end{cases} \text{ نمایش دیفرانسیلی}$$

قضیه یکتایی جواب

اگر معادله $f(x, y)$ در ناحیه مستطیلی D در صفحه xy تعریف شده باشد، شرط کافی برای آن که معادله دارای جواب یکتا مانند

$y = g(x)$ باشد، به طوری که $y(x_0) = y_0$ صدق کند، آن است که $\frac{\partial f}{\partial y}$ در ناحیه مستطیلی D پیوسته و کراندار باشند.

نست را منما معادله دیفرانسیلی $y' = x \sin xy$, $0 \leq x \leq 2$, $y(0) = 0$:

(۱) دارای جواب منحصر به فرد است.

(۲) جواب ندارد.

(۳) بی نهایت جواب دارد.

(۴) در فاصله داده شده جواب ندارد ولی در بخشی از آن جواب دارد.

گزینه (۱)

$$f(x, y) = x \sin xy \rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cos xy \Rightarrow -1 \leq \sin xy, \cos xy \leq 1$$

توابع سینوس و کسینوس توابع کراندار هستند. بنابراین $\frac{\partial f}{\partial y}$, $f(x, y)$ هر دو پیوسته و کراندار هستند، در نتیجه معادله دیفرانسیلی دارای جواب یکتا است.

نحوه تشکیل یک معادله دیفرانسیل:

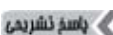
اگر جواب عمومی معادله دیفرانسیلی مفروض باشد، برای یافتن معادله دیفرانسیل متناظر، به تعداد پارامتر موجود، از آن جواب عمومی

مشتق می‌گیریم و با حذف پارامترهای موجود در آن دستگاه معادلات، معادله‌ای حاصل خواهد شد که به آن معادله دیفرانسیلی متناظر آن دسته جواب‌ها می‌گویند.

نست راهنما معادلات دیفرانسیلی دسته جواب زیر کدام است؟

$$y = cx + 2$$

$$y = y'x + 2 \quad (1) \quad y = y' + 2 \quad (2) \quad y = xy + y' \quad (3) \quad y = y'x - 2 \quad (4)$$

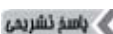
گزینه ۱ 

$$y = cx + 2 \Rightarrow y' = c \Rightarrow y = y'x + 2$$

در این معادله چون یک پارامتر (c) داشتیم، یکبار مشتق گرفتیم.

نست راهنما معادله دیفرانسیل متناظر با دسته جواب $y = c_1 e^x + c_2$ برابر است با:

$$y'' = y \quad (1) \quad y = y' \quad (2) \quad y' = y'' - 2 \quad (3) \quad y' = y'' \quad (4)$$

گزینه ۴ 

$$y = c_1 e^x + c_2 \Rightarrow y' = c_1 e^x \Rightarrow y'' = c_1 e^x \Rightarrow y' = y''$$

نست راهنما معادله متناظر به دسته جواب $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x}$ کدام است؟

$$y' = 2y \quad (1) \quad y'' + 3y' + 2y = 0 \quad (2) \quad y' + 3y = 0 \quad (3) \quad y'' + 3y = 0 \quad (4)$$

گزینه ۲ 

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} \quad (1) \Rightarrow y' = -2c_1 e^{-2x} - c_2 e^{-x} \quad (2)$$

$$\Rightarrow y'' = 4c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x} \quad (3)$$

$$\begin{cases} (2) + (3) \Rightarrow y' + y'' = 2c_1 e^{-2x} \\ (1) + (2) \Rightarrow y + y' = -c_1 e^{-2x} \end{cases} \Rightarrow y' + y'' = -2(y + y')$$

$$\Rightarrow y' + y'' + 2y + 2y' = 0 \Rightarrow y'' + 3y' + 2y = 0$$

روش‌های حل معادله مرتبه اول

معادلات جداپذیر و یا تفکیک پذیر

تابع جداپذیر: تابع $f(x, y)$ را نسبت به x, y جداپذیر می‌گویند هرگاه بتوان نوشت:

$$f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$$

مثال کدام یک از توابع زیر تفکیک پذیرند؟

$$1) f(x, y) = x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

چون x ها از y ها جدا نمی‌شوند، پس جداپذیر نیست. دقت کنید که دو تابع $h(y), g(x)$ را باید بتوان به صورت حاصل ضرب نوشت.

$$2) f(x, y) = \frac{y-1}{x} = (y-1) \cdot \frac{1}{x} \quad \text{جداپذیر}$$

۳) $e^{x-y} \cdot \sin x = (e^x \cdot \sin x) e^{-y}$ جداپذیر

۴) $f(x, y) = yx^r - y = y(x^r - 1)$ جداپذیر

تعریف: معادله $y' = f(x, y)$ را جداپذیر می‌گویند هرگاه تابع $f(x, y)$ جداپذیر باشد.

کدام یک از معادلات زیر جداپذیرند.

۱) $y' = y - x$ جداپذیر نیست.

۲) $y' = e^x \sin y$ جداپذیر

۳) $y' = yx^r$ جداپذیر

۴) $xy' - y = r \Rightarrow y' = \frac{r+y}{x} = (r+y) \cdot \frac{1}{x}$ جداپذیر

روش حل معادلات جداپذیر:

در این گونه معادلات ابتدا y' را به $\frac{dy}{dx}$ تبدیل می‌کنیم و سپس از دو سمت معادله انتگرال می‌گیریم:

$$y' = f(x, y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{h(y)} = dx \cdot g(x) \Rightarrow \int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x) dx + C \quad \text{جواب عمومی}$$

نست راهنما جواب عمومی معادله $y' = x^r y$ کدام است؟

$$y = \frac{x^r}{r} + c \quad (۴) \quad \ln|y| = \frac{x^r}{r} + c \quad (۳) \quad \ln|y| = \frac{x^r}{r} + c \quad (۲) \quad y = \frac{x^r}{r} + c \quad (۱)$$

گزینه ۳

$$y' = x^r y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^r y \Rightarrow \frac{dy}{y} = x^r dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int x^r dx \Rightarrow \ln|y| = \frac{x^r}{r} + C \quad \text{جواب عمومی}$$

نست راهنما جواب عمومی معادله $y' = \frac{y^r + 4}{x^r - 4}$ برابر است با:

$$\text{Arc tg } \frac{y}{r} = \ln \frac{x-r}{x+r} + c \quad (۲) \quad \frac{1}{r} \text{Arc tg } \frac{y}{r} = \frac{1}{r} \ln \frac{x-r}{x+r} + c \quad (۱)$$

$$\frac{1}{r} \text{Arc tg } \frac{y}{r} = \ln \frac{x+r}{x-r} + c \quad (۴) \quad \frac{1}{r} \text{Arc tgy} = \frac{1}{r} \ln \frac{x+r}{x-r} + c \quad (۳)$$

$$y' = \frac{y^r + 4}{x^r - 4} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^r + 4}{x^r - 4} \Rightarrow \frac{dy}{y^r + 4} = \frac{dx}{x^r - 4}$$

گزینه ۱

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y^r + 4} = \int \frac{dx}{x^r - 4} \Rightarrow \frac{1}{r} \operatorname{Arctg} \frac{y}{2} = \frac{1}{4} \operatorname{Ln} \frac{x-2}{x+2} + C \quad \text{جواب عمومی}$$

← نکته روابط انتگرال گیری مقابل را در ریاضی عمومی ۱ و ۲ به شکل مقابل داریم:

$$۱) \int \frac{dt}{at+b} = \frac{1}{a} \operatorname{Ln}(at+b) + c$$

$$۲) \int \frac{dt}{t^r + a^r} = \frac{1}{a} \operatorname{Arctg} \frac{t}{a} + c$$

$$۳) \int \frac{dt}{t^r - a^r} = \frac{1}{ra} \operatorname{Ln} \frac{t-a}{t+a} + c$$

$$۴) \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^r}} = \sinh^{-1} t + c$$

$$۵) \int \frac{dt}{\sqrt{t^r-1}} = \cosh^{-1} t + c$$

$$۶) \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^r}} = \operatorname{Arcsin} t + c$$

$$y' = \frac{y^r + 2y + 2}{x^r + 3x + 2}$$

جواب عمومی معادله زیر کدام است؟

نکته راهنما

$$\operatorname{Arc tg}(y+1) = \operatorname{Ln} \frac{(x - \frac{1}{2}) - \frac{3}{2}}{(x + \frac{1}{2})} + c \quad (۲)$$

$$\operatorname{Arc tgy} = \operatorname{Ln} \frac{(x - \frac{1}{2}) + \frac{3}{2}}{(x - \frac{1}{2}) - \frac{3}{2}} + c \quad (۱)$$

$$\operatorname{Arc tg}(y+1) = \operatorname{Ln} \frac{(x + \frac{3}{2}) - \frac{1}{2}}{(x + \frac{3}{2}) + \frac{1}{2}} + c \quad (۴)$$

$$\operatorname{Arc tgy} = \operatorname{Ln} \frac{(x - \frac{3}{2}) + \frac{1}{2}}{(x - \frac{3}{2}) - \frac{1}{2}} + c \quad (۳)$$

گزینه ۴ ← پاسخ درست

$$y' = \frac{y^r + 2y + 2}{x^r + 3x + 2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y^r + 2y + 2}{x^r + 3x + 2} \Rightarrow \frac{dy}{y^r + 2y + 2} = \frac{dx}{x^r + 3x + 2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y^r + 2y + 2} = \int \frac{dx}{x^r + 3x + 2} \Rightarrow \int \frac{dy}{(y+1)^r + 1} = \int \frac{dx}{\left(x + \frac{3}{2}\right)^r - \frac{1}{4}} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} t = y+1 \Rightarrow dt = dy \\ s = x + \frac{3}{2} \Rightarrow ds = dx \end{cases} \Rightarrow \int \frac{dt}{t^r + 1} = \int \frac{ds}{s^r - \frac{1}{4}} \Rightarrow$$

$$\operatorname{Arctg} t = \frac{1}{2 \times \frac{1}{2}} \operatorname{Ln} \frac{s - \frac{1}{2}}{s + \frac{1}{2}} + C \Rightarrow \operatorname{Arctg}(y+1) = \operatorname{Ln} \frac{\left(x + \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2}}{\left(x + \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}} + C$$

تذکر: برای تبدیل $x^2 + 3x + 2$ به اتحاد اول یا دوم به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$x^2 + 3x + 2 \Rightarrow \frac{x}{2} \text{ ضریب } = \frac{3}{2} \xrightarrow{\text{توان } 2} \frac{9}{4} \quad \text{این عدد را اضافه و کم می‌کنیم.}$$

$$x^2 + 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 2 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 2 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

نکته راهنما جواب عمومی معادله $y' = e^{x-y} \frac{x^2}{\sin y}$ کدام است؟

$$\sin y - \cos y = x^2 e^x + 2x e^x + c \quad (2) \quad \cos y - e^y \sin y = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c \quad (1)$$

$$e^y (\sin y - \cos y) = x^2 e^x + 2x e^x + c \quad (4) \quad \frac{e^y}{2} (\sin y - \cos y) = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c \quad (3)$$

گزینه ۳

$$y' = e^{x-y} \cdot \frac{x^2}{\sin y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^x \cdot x^2 \left(\frac{e^{-y}}{\sin y} \right)$$

$$\Rightarrow \int \frac{\sin y}{e^{-y}} dy = \int x^2 e^x \Rightarrow \int e^y \cdot e^{\sin y} = \int x^2 e^x$$

حال حاصل هر انتگرال را به روش جز به جز به دست می‌آوریم:

u	dv
+	x^2
-	$2x$
+	2
o	e^x

$$\Rightarrow \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c_1$$

u	dv
+	$\sin y$
-	$\cos y$
+	$-\sin y$
	e^y

$$\Rightarrow \int e^y \sin y dy = e^y \sin y - e^y \cos y + \int -e^y \sin y dy$$

$$\Rightarrow \int e^y \sin y dy + \int e^y \sin y dy = e^y \sin y - e^y \cos y$$

$$\Rightarrow 2 \int e^y \sin y dy = e^y (\sin y - \cos y) \Rightarrow \int e^y \sin y dy = \frac{e^y}{2} (\sin y - \cos y) + c_2 \Rightarrow$$